Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2003 С. 133 – 137

С. И. Хашин

СЕМНАДЦАТИТОЧЕЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ОТ 2 ПЕРЕМЕННЫХ

Найдена интерполяционная формула от 2 переменных, построенная на 17 узлах интерполяции. Приведено ее сравнение с билинейной и бикубической интерполяционными формулами. Полученная формула может быть использована при сжатии графических файлов методами булевой алгебры.

The interpolational formula with 2 variables constructed on 17 points of interpolation is found. The comparison of it with bilinear and bicubic interpolation formulas is given. The received formula can be used for compression of graphic files by methods of Boolean algebra.

УДК 512.54.

Введение

Подходы к сжатию информации методами, основанными на булевых алгебрах [1], могут применяться к информации самого разнообразного происхождения. В то же время их эффективное применение требует учета специфики информации каждого конкретного вида. Одним из таких видов информации являются графические файлы. Самые эффективные на сегодня методы сжатия таких файлов (jpeg2000, см., напр., [1, 3, 4]), используют некоторые интерполяционные формулы от двух переменных. При этом чаще всего применяется так называемая “бикубическая”интерполяция [3]. В настоящей статье предлагается более сложный метод интеполяции, дающий лучшие результаты.

Пусть $f(y,x)$ — достаточно гладкая функция от двух переменных. Будем считать, что нам даны ее значения в целых точках. Задачей интерполяции является как можно более точное восстановление значений функции во всех промежуточных точках.

Тривиальным способом такой интерполяции является округление аргументов до целого:

$$f(y,x) = f(\bar{y},\bar{x}). \qquad (1)$$

где $\bar{v}$ - округление v до ближайшего целого.

Чуть более сложной (и более точной) является билинейная интерполяция, задаваемая формулами

$$f(y,x) = (1-x)(1-y)f(0,0)+x(1-y)f(0,1)+y(1-x)f(1,0)+xyf(1,1), \qquad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00079).

где предполагается, что числа y, x лежат в пределах от 0 до 1. Таким образом, при билинейной интерполяции значение функции в точке вычисляется через ее значения в четырех соседних точках. Отметим, что билинейная интерполяция дает точное значение, если исходная функция линейна по каждой переменной в отдельности, то есть имеет вид $f(y,x) = a_1 + a_2 y + a_3 x + a_4 xy$.

В следующем по сложности случае бикубической интерполяции значение функции в точке вычисляется через ее значения в 16 соседних точках:

$$\begin{aligned} f(y,x) = {} & b_1 f(0,0) + b_2 f(0,1) + b_3 f(1,0) + b_4 f(1,1) + \\ & b_5 f(0,-1) + b_6 f(-1,0) + b_7 f(1,-1) + b_8 f(-1,1) + \\ & b_9 f(0,2) + b_{10} f(2,0) + b_{11} f(-1,-1) + b_{12} f(1,2) + \\ & b_{13} f(2,1) + b_{14} f(-1,2) + b_{15} f(2,-1) + b_{16} f(2,2), \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x+1)(y-1)(y-2)(y+1),\\
b_2 &= -\frac{1}{4}x(x+1)(x-2)(y-1)(y-2)(y+1),\\
b_3 &= -\frac{1}{4}y(x-1)(x-2)(x+1)(y+1)(y-2),\\
b_4 &= \frac{1}{4}xy(x+1)(x-2)(y+1)(y-2),\\
b_5 &= -\frac{1}{12}x(x-1)(x-2)(y-1)(y-2)(y+1),\\
b_6 &= -\frac{1}{12}y(x-1)(x-2)(x+1)(y-1)(y-2),\\
b_7 &= \frac{1}{12}xy(x-1)(x-2)(y+1)(y-2),\\
b_8 &= \frac{1}{12}xy(x+1)(x-2)(y-1)(y-2),\\
b_9 &= \frac{1}{12}x(x-1)(x+1)(y-1)(y-2)(y+1),\\
b_{10} &= \frac{1}{12}y(x-1)(x-2)(x+1)(y-1)(y+1),\\
b_{11} &= \frac{1}{36}xy(x-1)(x-2)(y-1)(y-2),\\
b_{12} &= -\frac{1}{12}xy(x-1)(x+1)(y+1)(y-2),\\
b_{13} &= -\frac{1}{12}xy(x+1)(x-2)(y-1)(y+1),\\
b_{14} &= -\frac{1}{36}xy(x-1)(x+1)(y-1)(y-2),\\
b_{15} &= -\frac{1}{36}xy(x-1)(x-2)(y-1)(y+1),\\
b_{16} &= \frac{1}{36}xy(x-1)(x+1)(y-1)(y+1),
\end{aligned}$$

Бикубическая интерполяция дает точное значение, если исходная функция имеет степень не выше 3 по каждой переменной в отдельности, то есть является линейной комбинацией мономов $x^i y^j$ при $i,j \leqslant 3$.

Конечно, аналогичным образом можно использовать более сложные формулы, вычисляющие приближенное значение функции через ее значения в соседних 36, 64, ... , $4k^2$ точках. Но, как показывают эксперименты, качество этих формул хуже, чем у бикубической интерполяции.

Это не означает, что нельзя построить интерполяционные формулы, дающие более точное приближение, чем бикубическая. В качестве примера приведем интерполяционную формулу, построенную на основе значений исходной функции в соседних 17 точках.

Интерполяция по 17 точкам

Интерполяционную формулу для нахождения значения функции в заданной точке по ее значениям в соседних целочисленных точках можно строить по любой системе целочисленных точек в окрестности заданной. При билинейной интерполяции выбирается квадрат 2×2 из четырех ближайших точек, при бикубической — квадрат 4×4 из 16 точек. На самом деле выбор точек квадрата в качестве узлов интерполяции объясняется в основном большей простотой получаемых формул.

Для получения максимальной точности интерполяционной формулы имеет смысл выбирать не точки из квадрата, а целочисленные точки, находящиеся от заданной на расстоянии, не превышающем некоторого предела. После обработки большого количества различных вариантов этого подхода наболее эффективным оказался подход, основанный на 17 точках.

Для построения такой формулы поступим следующим образом. Пусть требуется найти значение функции f в нецелочисленной точке (y, x). Не ограничивая общности, выбрав подходящую систему координат, можно считать, что $0 \leqslant x,\ y < 1/2$. 17 точек, наиболее близких к этой области, —

$$(0,0),\ (0,\pm1),\ (\pm1,0),\ (\pm1,\pm1),\ (0,\pm2),\ (\pm2,0),\ (\pm1,2),\ (2,\pm1)$$

Построим интерполяционную формулу по этим точкам. Для выбора коэффициентов потребуем, чтобы формула была точна для всех мономов степени не выше 4: 1, y, x, y^2, yx, x^2, ... , x^4. Их количество равно 15. Таким образом, для нахождения всех коэффициентов у нас не хватает еще двух условий. Потребуем, чтобы формула была точна для мономов x^3y^2, x^2y^3. Из этих условий все коэффициенты находятся однозначно.

$$\begin{aligned} f(y,x) = &b_1 f(0,0) + b_2 f(0,1) + b_3 f(1,0) + b_4 f(1,1) + b_5 f(0,-1) + \\ &b_6 f(-1,0) + b_7 f(1,-1) + b_8 f(-1,1) + b_9 f(0,2) + \\ &b_{10} f(2,0) + b_{11} f(-1,-1) + b_{12} f(1,2) + b_{13} f(2,1) + \\ &b_{14} f(-1,2) + b_{15} f(2,-1) + b_{16} f(0,-2) + b_{17} f(-2,0), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 - \frac{5}{4}(y^2 + x^2) + \frac{1}{2}xy(x+y) + \\ &\qquad \frac{1}{4}(y^4 + 4x^2y^2 + x^4) - \frac{1}{2}x^2y^2(x+y), \\ b_2 &= \frac{1}{12}x(x+1)(8 - 2x^2 + 6xy^2 + 3y^3 - 12y^2 - 3y), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_3 &= \frac{1}{12}y(1+y)(8-2y^2+6x^2y+3x^3-12x^2-3x),\\
b_4 &= \frac{1}{4}xy(x+1)(1+y)(3-y-x),\\
b_5 &= \frac{1}{12}x(x-1)(8-3y-2x^2-4y^2+2xy^2+3y^3),\\
b_6 &= \frac{1}{12}y(y-1)(8-3x-2y^2-4x^2+2x^2y+3x^3),\\
b_7 &= \frac{1}{12}xy(x-1)(y+1)(5-3y-x),\\
b_8 &= \frac{1}{12}xy(x+1)(y-1)(5-y-3x),\\
b_9 &= \frac{1}{24}x(x^2-1)(2+x-4y^2),\\
b_{10} &= \frac{1}{24}y(y^2-1)(2+y-4x^2),\\
b_{11} &= \frac{1}{12}xy(x-1)(y-1)(1-x-y),\\
b_{12} &= \frac{1}{12}yx(x^2-1)(1+y),\\
b_{13} &= \frac{1}{12}xy(y^2-1)(x+1),\\
b_{14} &= \frac{1}{12}yx(x^2-1)(y-1),\\
b_{15} &= \frac{1}{12}xy(y^2-1)(x-1),\\
b_{16} &= \frac{1}{24}x(x^2-1)(x-2),\\
b_{17} &= \frac{1}{24}y(y^2-1)(y-2).
\end{aligned}
$$

Оценки качества формулы

Качество интерполяционной формулы I имеет смысл проверять на некотором практически важном классе функций. В нашем случае в качестве таких функций естественно выбрать функцию яркости некоторого изображения. Пусть f — некоторая такая функция, f_1 — функция, полученная из f сжатием масштаба в два раза по каждой из координат:

$$f_1(y,x) = \frac{f(2y,2x)+f(2y+1,2x)+f(2y,2x+1)+f(2y+1,2x+1)}{4},$$

f_2 — функция, полученная из f_1 увеличением масштаба в 2 раза по каждой из координат с помощью выбранной интерполяционной формулы. Обозначим через $\mathrm{kind}_0(I,f)$ среднеквадратичное отклонение функции f_2 от f на множестве целых точек в области определения. Разумеется, эта величина напрямую не может характеризовать качество интерполяционной формулы I, так как зависит от выбранной функции f. Убрать эту зависимость можно, например, следующим образом. Введем величину

$$\mathrm{kind}(I,f) = \frac{\mathrm{kind}_0(I,f)}{\mathrm{kind}_0(I_0,f)},$$

где I_0 — тривиальная интерполяционная формула (1). Выбранная величина оказывается малозависящей от функции f. Результаты исследования нескольких сотен графических файлов из самых разных источников показывают, что колебания величины $\mathrm{kind}(I, f)$ в зависимости от второго аргумента составляют от 0.002 до 0.01. При этом само значение $\mathrm{kind}(I, f)$ имеет порядок 1. Таким образом, можно сделать следующий вывод.
Величина kind(I) определяется с точностью до 1 процента и может служить объективной оценкой качества интерполяционной формулы.

В заключение приведем таблицу, полученную в результате обработки большого количества графических файлов, в которой приведены экспериментально найденные величины $\mathrm{kind}(I)$.

Формула I	$\mathrm{kind}(I)$
тривиальная I_0	1
билинейная I_1	0.85
бикубическаяI_3	0.74
17-точечная I_{17}	0.62

Библиографический список

1. *Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юдин В.* Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео // М.: Диалог — МИФИ, 2002.
2. *Толстопятов А. А.* О структуре дискретной информации и общих условиях ее сжатия // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2002. Вып. 3. С. 80—82.
3. *Хашин С. И.* Интерполяционный метод сжатия графики // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2002. Вып. 3. С. 140—143.
4. *Adams M. D.* The JPEG-2000 Still Image Compression Standard // ISO/IEC JTC 1/SC 29/WG1 N 2412. Sept. 2001.