УДК 512.543

Д. В. Гольцов, Н. И. Яцкин

КЛАССЫ ГРУПП И ПОДГРУППОВЫЕ ТОПОЛОГИИ

Произвольный абстрактный класс групп определяет в произвольной группе семейство нормальных подгрупп, факторы по которым принадлежат данному классу. Это семейство задает на группе (подгрупповую) топологию, согласованную с групповой структурой.

Многие важные понятия и результаты комбинаторной теории групп (КТГ) имеют адекватную топологическую интерпретацию. Настоящая работа является некоторым продвижением в русле известной тенденции к топологизации КТГ. В частности, проясняется топологический смысл условия Грюнберга в определении корневого класса групп; выводится критерий топологической наследственности подгруппы в терминах так называемых квазиретрактов.

Ключевые слова: абстрактный класс групп, подгрупповая топология, ретракт группы.

An abstract class C of groups defines the so-called co-C topology on an arbitrary group. This topology is generated by the family of co-C normal subgroups. Some important concepts and results of the combinatorial group theory (CGT) have adequate topological interpretations. Our work follows in some detail this well known “topologizing trend” in CGT. In particular we clarify the topological sense of the Gruenberg condition in the definition of a root class of groups and investigate some criterions of being co-C hereditary for subgroups.

Key words: abstract class of groups, subgroup topology, retract.

1. Абстрактные классы групп и аппроксимируемость. Непустой подкласс $\mathcal{C}$ класса всех групп $\mathcal{G}$ называется *абстрактным* классом групп, если он вместе с каждой группой содержит все изоморфные ей группы. В данной работе мы всегда будем дополнительно предполагать, что $\mathcal{C}$ содержит единичную группу. Элементы класса $\mathcal{C}$ именуются *$\mathcal{C}$-группами.*

Для любой группы G нормальная подгруппа $N \trianglelefteq G$ называется *ко-$\mathcal{C}$ подгруппой*, если соответствующая фактор-группа G/N принадлежит классу $\mathcal{C}$; используется обозначение $N \overset{\mathcal{C}}{\trianglelefteq} G$. Семейство

$$\mathcal{C}^*(G) = \{N : N \overset{\mathcal{C}}{\trianglelefteq} G\} \tag{1}$$

всех ко-$\mathcal{C}$ подгрупп непусто, поскольку, в силу сделанного выше дополнительного предположения, оно содержит группу G.

Нормальная подгруппа

$$R_{\mathcal{C}}(G) = \bigcap \mathcal{C}^*(G), \qquad (2)$$

являющаяся пересечением всех ко-$\mathcal{C}$ подгрупп, называется *$\mathcal{C}$-аппроксимантом* группы G (английский вариант этого термина, *residual*, используется, например, в [8]).

Группа называется *$\mathcal{C}$-аппроксимируемой*, если для любого ее неединичного элемента найдется не содержащая этот элемент ко-$\mathcal{C}$ подгруппа, или, что равносильно, если $\mathcal{C}$-аппроксимант тривиален (сводится к единице). Для класса всех $\mathcal{C}$-аппроксимируемых групп принимается обозначение ${}_R\mathcal{C}$.

Семейство $\mathcal{C}^*(G)$ может быть расширено до семейства $\mathcal{C}^{**}(G)$, состоящего из всевозможных конечных пересечений подгрупп, входящих в $\mathcal{C}^*(G)$; ясно, что семейство $\mathcal{C}^{**}(G)$ замкнуто относительно конечных пересечений и что полное пересечение $\bigcap \mathcal{C}^{**}(G)$ совпадает с аппроксимантом (2).

Перечислим далее, следуя, в основном, работам [10] и, отчасти, [7], типичные требования (предположения), относящиеся к классам групп: (C_1) замкнутость относительно подгрупп; (C_2) замкнутость относительно гомоморфных образов; (C_3) замкнутость относительно конечных прямых произведений; (C_4) замкнутость относительно конечных подпрямых произведений; (C_5) замкнутость относительно расширений; (C_6) *условие Грюнберга*: для любого субнормального ряда $M \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, факторы которого являются $\mathcal{C}$-группами ($G/H, H/M \in \mathcal{C}$), найдется подгруппа $D \leqslant M$, нормальная во всей группе G и такая, что $G/D \in \mathcal{C}$.

Класс $\mathcal{C}$ называется *псевдомногообразием*, если выполнены условия (C_1)—(C_3); *E-псевдомногообразием*, если выполнены (C_1), (C_2) и (C_5); *корневым классом групп*, если справедливы три аксиомы: (C_1), (C_3) и (C_6).

Каждая из аксиом (C_1)—(C_6) непосредственным образом влияет на свойства семейств (1) и опосредованно отражается на свойствах класса ${}_R\mathcal{C}$.

Так, справедливость условия (C_4) влечет замкнутость семейства (1) относительно конечных пересечений (фактор-группа группы G по конечному пересечению некоторых ко-$\mathcal{C}$ подгрупп оказывается, в силу теоремы Ремака, изоморфной подпрямому произведению конечного числа $\mathcal{C}$-групп); в этом случае семейство $\mathcal{C}^{**}(G)$ совпадает с семейством (1).

Аксиома (C_2) обеспечивает выполнение следующего свойства ко-$\mathcal{C}$ подгрупп: если нормальная подгруппа $N_2 \trianglelefteq G$ содержит ко-$\mathcal{C}$ подгруппу N_1, то она сама является ко-$\mathcal{C}$ подгруппой (фактор-группа $G/N_2 \cong (G/N_1)/(N_2/N_1)$ принадлежит $\mathcal{C}$ как гомоморфный образ группы $G/N_1 \in \mathcal{C}$).

Таким образом, если справедлива конъюнкция $(C_2) \wedge (C_4)$, то семейство $\mathcal{C}^*(G)$ является *фильтром* в частично упорядоченном множестве всех нормальных подгрупп группы G.

Условие (C_1) обеспечивает следующую характеризацию $\mathcal{C}$-аппроксимируемых групп: группа G принадлежит классу ${}_R\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда она вкладывается в прямое произведение $\mathcal{C}$-групп (доказательство, также опирающееся на теорему Ремака, см. в [7]). В присутствии (C_1) предположение (C_4) можно заменить более слабым условием (C_3).

2. Подгрупповые топологии. Структура *топологической группы* (G, τ) может быть однозначно определена с помощью задания некоторого непустого семейства $\mathcal{B}$ непустых подмножеств группы G, которое удовлетворяет, во-первых, условию

$$(\forall N_1, N_2 \in \mathcal{B})\,(\exists N_3 \in \mathcal{B})\,[\,N_3 \subseteq N_1 \cap N_2\,], \tag{3}$$

выражающему тот факт, что $\mathcal{B}$ является *базисом* некоторого *фильтра* на G, а во-вторых — еще четырем условиям [4, с. 33], обеспечивающим существование согласованной со структурой группы топологии τ на G, относительно которой все элементы $N \in \mathcal{B}$ будут открытыми окрестностями нейтрального элемента $1 \in G$.

Особый, весьма специфический, класс топологических групп получается, если все элементы $N \in \mathcal{B}$ являются *нормальными подгруппами* группы G. В этом случае упомянутые (но не выписанные) выше четыре условия выполняются автоматически и требует проверки лишь *критерий фильтрового базиса* (3).

Такие топологии именуются *подгрупповыми*. В подгрупповой топологии базис $\mathcal{B}$ окрестностей единицы состоит из открытых (и, как следствие, замкнутых) нормальных подгрупп; базисными (тоже *открыто-замкнутыми*) окрестностями произвольной точки $g \in G$ служат классы смежности gN, где $N \in \mathcal{B}$. Множество всех открытых (в смысле подгрупповой топологии) подгрупп описывается как семейство таких подгрупп $H \leqslant G$, каждая из которых содержит некоторую нормальную подгруппу $N \in \mathcal{B}$.

Из сказанного в первом пункте немедленно вытекает

Предложение 1. *Для любого абстрактного класса групп $\mathcal{C}$ и произвольной группы G семейство нормальных подгрупп $\mathcal{C}^{**}(G)$ порождает на G некоторую подгрупповую топологию.*

Эта топология будет обозначаться $\tau_G^{(\mathcal{C})}$. Ее можно охарактеризовать как *слабейшую* из топологий на G, обеспечивающих непрерывность всех *эпиморфизмов* этой группы на группы из класса $\mathcal{C}$.

Заметим, что семейство ко-$\mathcal{C}$ подгрупп $\mathcal{C}^{*}(G)$ является, вообще говоря, лишь *предбазисом* фильтра окрестностей единицы в топологии $\tau_G^{(\mathcal{C})}$; при выполнении аксиом $(C_1), (C_3)$ этот предбазис оказывается базисом. Если, кроме того, выполнено условие (C_2), то, как отмечалось выше, $\mathcal{C}^{*}(G)$ будет фильтром в множестве нормальных подгрупп (оставаясь базисом фильтра в множестве всех подмножеств группы G).

Топологию $\tau_G^{(\mathcal{C})}$ мы будем называть *ко-$\mathcal{C}$ топологией*, полагая, что это имя является более адекватным, нежели термин *про-$\mathcal{C}$ топология*, принятый, скажем, в [6, 9, 10], но уместный, по-видимому, лишь в частном случае, когда эта топология *хаусдорфова*, поскольку именно тогда топологическая группа $(G, \tau_G^{(\mathcal{C})})$ может быть вложена в свое *про-$\mathcal{C}$ пополнение* $\widetilde{G}$, являющееся *проективным пределом* обратного спектра $\mathcal{C}$-групп (наделенных дискретной топологией):

$$\widetilde{G} = \varprojlim \{G/N : N \in \mathcal{C}^*(G)\}. \tag{4}$$

Предложение 2. *Топологическая группа $(G, \tau_G^{(\mathcal{C})})$ хаусдорфова тогда и только тогда, когда она $\mathcal{C}$-аппроксимируема, т. е. когда тривиален $\mathcal{C}$-аппроксимант (2).*

Доказательство. Как известно, критерием хаусдорфовости топологической группы служит тривиальность пересечения всех базисных окрестностей, т. е. в данном случае равенство $\bigcap \mathcal{C}^{**}(G) = \{1\}$, но, как отмечалось выше, пересечение $\bigcap \mathcal{C}^{**}(G)$ совпадает с $\mathcal{C}$-аппроксимантом.

Подчеркнем для дальнейшего, что открытыми (нормальными) подгруппами в смысле ко-$\mathcal{C}$ топологии будут те и только те (нормальные) подгруппы, каждая из которых содержит *некоторое конечное пересечение ко-$\mathcal{C}$ подгрупп.* В предположении (C_1) и (C_3) это описание несколько упрощается; выделенную курсивом фразу можно заменить на следующую: *некоторую ко-$\mathcal{C}$ подгруппу.* Если к тому же выполнено (C_2), то открытыми нормальными подгруппами будут ко-$\mathcal{C}$ подгруппы и только они.

3. Ко-$\mathcal{C}$ топология на фактор-группе. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный абстрактный класс групп, G — произвольная группа, H — нормальная подгруппа в G, $\widehat{G} = G/H$ — соответствующая фактор-группа, $\pi : G \to \widehat{G}$ — эпиморфизм проектирования. На фактор-группе естественным образом возникают две топологии, превращающие эту группу в топологическую:

1) так называемая *фактор-топология* $\widehat{\tau_G^{(\mathcal{C})}}$ для топологии $\tau_G^{(\mathcal{C})}$, являющаяся *сильнейшей* из топологий на $\widehat{G}$, обеспечивающих непрерывность проекции π; эту топологию можно также назвать *образом* топологии $\tau_G^{(\mathcal{C})}$ при отображении π; используется обозначение

$$\widehat{\tau_G^{(\mathcal{C})}} = \pi(\tau_G^{(\mathcal{C})}); \tag{5}$$

2) собственная ко-$\mathcal{C}$ топология $\tau_{\widehat{G}}^{(\mathcal{C})}$ группы $\widehat{G}$.

Предложение 3. *Для любого абстрактного класса групп $\mathcal{C}$, любой группы G и любой нормальной подгруппы $H \trianglelefteq G$*

1) проекция π на фактор-группу $\widehat{G} = G/H$ непрерывна в смысле ко-$\mathcal{C}$ топологий на G и на $\widehat{G}$;

2) фактор-топология (5) мажорирует ко-$\mathcal{C}$ топологию $\tau_{\widehat{G}}^{(\mathcal{C})}$.

Доказательство. Непрерывность гомоморфизма достаточно проверять в одной точке; для проверки непрерывности в единице достаточно доказать, что прообраз *предбазисной* окрестности снова является *предбазисной* окрестностью; поскольку прообраз пересечения равен пересечению прообразов, аналогичное утверждение будет справедливо и для *базисных* окрестностей.

Пусть $M \in \mathcal{C}^*(\widehat{G})$, т. е. $M \trianglelefteq \widehat{G}$ и $\widehat{G}/M \in \mathcal{C}$. Тогда $M = L/H$, где $L = \overset{-1}{\pi}(M)$ — прообраз M ($H \leqslant L \trianglelefteq G$). Для нормальной подгруппы L получим

$$G/L \cong (G/H)/(L/H) = \widehat{G}/M \in \mathcal{C},$$

т. е. $L \in \mathcal{C}^*(G)$. Первое утверждение доказано, а второе из него следует в силу того, что фактор-топология (5) *мажорирует* любую топологию на $\widehat{G}$, обеспечивающую непрерывность π.

Проанализируем теперь условия, обеспечивающие совпадение топологий

$$\tau_{\widehat{G}}^{(\mathcal{C})} = \widehat{\tau_G^{(\mathcal{C})}}. \tag{6}$$

Из общей теории топологических групп известно, что фактор-топология, фигурирующая в правой части равенства (6), обладает следующим характерным свойством: она обеспечивает не только непрерывность, но и *открытость* отображения проектирования π. Таким образом, необходимым (и, как нетрудно показать, достаточным) условием справедливости равенства (6) оказывается требование открытости эпиморфизма π в смысле ко-$\mathcal{C}$ топологий.

Предложение 4. *Если $\mathcal{C}$ удовлетворяет аксиомам (C_1)—(C_3), т. е. является псевдомногообразием групп, то эпиморфизм π является открытым отображением в смысле топологий $\tau_G^{(\mathcal{C})}$ и $\tau_{\widehat{G}}^{(\mathcal{C})}$; при этом имеет место равенство топологий (6).*

Доказательство. Для доказательства открытости отображения достаточно проверить, что оно переводит *базисную* окрестность единицы снова в *базисную* окрестность единицы. Было бы, вообще говоря, недостаточным убедиться в справедливости аналогичного утверждения для *предбазисных* окрестностей, поскольку образ пересечения не обязан совпадать с пересечением образов. Это вынуждает нас предположить справедливыми аксиомы (C_1) и (C_3), в результате чего классы ко-$\mathcal{C}$ подгрупп будут именно *базисами* соответствующих ко-$\mathcal{C}$ топологий (см. пояснения, следующие за предложением 1).

Итак, возьмем произвольную базисную окрестность $N \in \mathcal{C}^*(G)$. Ее π-образ совпадает, очевидно, с π-образом нормальной подгруппы NH:

$$\pi(N) = \pi(NH) = NH/H \trianglelefteq G/H = \widehat{G}. \tag{7}$$

Из аксиомы (C_2) следует, что нормальная подгруппа $NH \trianglelefteq G$ является ко-$\mathcal{C}$ подгруппой как надгруппа ко-$\mathcal{C}$ подгруппы N (см. п. 1). Для нормальной подгруппы (7) получается теперь:

$$\widehat{G}/\pi(N) = (G/H)/(NH/N) \cong G/NH \in \mathcal{C}, \tag{8}$$

т. е. (7) является базисной окрестностью единицы в фактор-группе.

4. Ко-$\mathcal{C}$ топология на подгруппе. Пусть $\mathcal{C}$ — абстрактный класс групп, G — группа, G' — подгруппа в G, $\iota : G' \to G$ — мономорфизм вложения. На подгруппе G' естественным образом возникают две топологии, превращающие ее в топологическую группу:

1) *индуцированная* топология $(\tau_G^{(\mathcal{C})})'$, являющаяся *слабейшей* из топологий на G', обеспечивающих непрерывность вложения ι; эту топологию можно также назвать *прообразом* топологии $\tau_G^{(\mathcal{C})}$ при отображении ι; используется обозначение

$$(\tau_G^{(\mathcal{C})})' = \overset{-1}{\iota}(\tau_G^{(\mathcal{C})}); \tag{9}$$

2) собственная ко-$\mathcal{C}$ топология $\tau_{G'}^{(\mathcal{C})}$ группы G'.

Базисными окрестностями единицы в топологии (9) служат пересечения $N' = N \cap G'$ базисных окрестностей $N \in \mathcal{C}^*(G)$ с подгруппой G'.

Предложение 5. *Если класс $\mathcal{C}$ удовлетворяет аксиоме (C_1), то для любой группы G и любой подгруппы $G' \leqslant G$*

1) вложение ι непрерывно в смысле ко-$\mathcal{C}$ топологий на G' и на G;

2) ко-$\mathcal{C}$ топология $\tau_{G'}^{(\mathcal{C})}$ мажорирует индуцированную топологию (9).

Доказательство. Для доказательства непрерывности ι достаточно доказать, что $N \in \mathcal{C}^*(G)$ влечет $N' \in \mathcal{C}^*(G')$. Это благодаря (C_1) вытекает из следующей цепочки:

$$G'/N' = G'/(N \cap G') \cong G'N/N \leqslant G/N \in \mathcal{C}. \tag{10}$$

Второе утверждение, как и в предложении 3, немедленно следует из первого.

Индуцированная топология (9) может оказаться строго более слабой, нежели собственная ко-$\mathcal{C}$ топология подгруппы, причем вне зависимости от свойств класса $\mathcal{C}$ (см. в [10, с. 76] пример для случая класса $\mathcal{C} = \mathcal{F}$ всех *конечных* групп, который, очевидно, удовлетворяет всем шести аксиомам из п. 1).

5. Ко-$\mathcal{C}$ наследственные подгруппы. Будем называть подгруппу G' *ко-$\mathcal{C}$ наследственной* в группе G, если имеет место равенство топологий

$$\tau_{G'}^{(\mathcal{C})} = (\tau_G^{(\mathcal{C})})'. \tag{11}$$

В работе [5] использовался термин *$\mathcal{C}$-индуцируемая* подгруппа; предлагались и другие наименования (см., напр., [6]).

Равенство (11) равносильно следующему требованию: вложение $\iota : G' \to G$ является (в смысле ко-$\mathcal{C}$ топологий) гомеоморфизмом на свой образ. Его можно также пересказать в терминах *предбазисных* окрестностей:

$$(\,\forall\, M \in \mathcal{C}^*(G')\,)\,(\,\exists\, N \in \mathcal{C}^*(G)\,)\,[\,N \cap G' \subseteq M\,]. \tag{12}$$

Условие (12) фигурировало (вне топологического контекста и в других обозначениях) в работе [3, с. 53], где создана специальная терминология: в случае выполнения (12) группа G именуется *$\mathcal{C}$-квазирегулярной по подгруппе G'*.

Используя терминологию [3], получаем следующий критерий.

Предложение 6. *Пусть класс групп $\mathcal{C}$ удовлетворяет аксиоме (C_1). В произвольной группе G подгруппа G' является ко-$\mathcal{C}$ наследственной тогда и только тогда, когда группа G $\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппе G'.*

В работе [3] рассматривается также понятие *$\mathcal{C}$-регулярности* группы по подгруппе, с заменой включения в (12) на равенство. Это условие является, вообще говоря, более сильным, нежели $\mathcal{C}$-квазирегулярность. Попытка превратить включение $N \cap G' \subseteq M$ в равенство $N_1 \cap G' = M$, положив $N_1 = NM$, приводит к подгруппе, которая, в отличие от N, уже не обязана быть нормальной в G.

Здесь мы введем условие *усиленной $\mathcal{C}$-квазирегулярности* группы по подгруппе следующим образом:

$$(\,\forall\, M \in \mathcal{C}^*(G')\,)\,(\,\exists\, N_0 \in \mathcal{C}^*(G)\,)\,[\,N_0 \subseteq M\,]. \tag{13}$$

Далее уточним предложение 6 в важном частном случае, когда подгруппа G' является открытой в G.

Предложение 7. *Пусть класс групп $\mathcal{C}$ удовлетворяет аксиоме (C_1). Для открытой подгруппы G' произвольной группы G квазирегулярность G по G' влечет усиленную квазирегулярность.*

Доказательство. В случае открытости G' пересечение $N \cap G'$ также открыто и, следовательно, условие (12) влечет существование ко-$\mathcal{C}$ подгруппы $N_0 \subseteq N \cap G'$, что обеспечивает выполнение условия (13).

6. Топологический смысл условия Грюнберга. Понятие корневого класса групп и, в частности, условие (C_6) были введены в работе [7] в 1957 г., но лишь в 2002 г. Д. Н. Азаровым [1] было замечено важнейшее свойство корневых классов: любая *свободная* группа аппроксимируется любым корневым классом. Легко убедиться в том, что корневой класс групп удовлетворяет также аксиоме (C_5) (доказательство этого и других важных свойств можно найти в указанных выше статьях). Частичным обращением последнего факта является следующее утверждение.

Предложение 8. *Если подкласс $\mathcal{C}$ класса $\mathcal{F}$ конечных групп удовлетворяет аксиомам (C_1) и (C_5), то он является корневым.*

Доказательство. Рассмотрим *$\mathcal{C}$-субнормальный* ряд (т. е. субнормальный ряд с факторами из $\mathcal{C}$):

$$M \overset{\mathcal{C}}{\trianglelefteq} H \overset{\mathcal{C}}{\trianglelefteq} G. \tag{14}$$

Искомую подгруппу $D \leqslant M$ такую, что $D \overset{\mathcal{C}}{\trianglelefteq} G$, определим как *сердцевину* подгруппы M в G :

$$D = M_G = \bigcap \{M^g : g \in G\}. \tag{15}$$

Тот факт, что класс $\mathcal{C}$ состоит из конечных групп, влечет конечность индекса M как подгруппы в G и, как следствие, — конечность пересечения в правой части формулы (15):

$$D = \bigcap_{i=1}^{r} M^{g_i};\ g_i \in G;\ i = 1, ..., r. \tag{16}$$

Сопряженные подгруппы M^{g_i}, так же как и M, являются ко-$\mathcal{C}$ подгруппами в H. Условие (C_5) влечет (C_3), вместе с (C_1) это обеспечивает (см. заключительные замечания в п. 1) замкнутость семейства $\mathcal{C}^*(H)$ относительно конечных пересечений, так что $D \in \mathcal{C}^*(H)$.

Остается еще раз использовать аксиому (C_5): группа G/D является расширением своей нормальной подгруппы $H/D \in \mathcal{C}$, причем фактор-группа $(G/D)/(H/D) \cong G/H \in \mathcal{C}$, следовательно, G/D также принадлежит классу $\mathcal{C}$.

Из предложения 7 непосредственно вытекает следующая топологическая интерпретация условия Грюнберга.

Предложение 9. *Если абстрактный класс групп $\mathcal{C}$ удовлетворяет аксиомам (C_1) и (C_3), то аксиома (C_6) оказывается равносильной следующему утверждению:*

$(C_6)'$ *в любой группе любая ко-$\mathcal{C}$ подгруппа ко-$\mathcal{C}$ наследственна;*

в предположении (C_2) утверждению $(C_6)'$ можно придать другую форму:

$(C_6)''$ *в любой группе любая открытая (в смысле ко-$\mathcal{C}$ топологии) подгруппа ко-$\mathcal{C}$ наследственна.*

7. Ко-$\mathcal{C}$ наследственность замкнутых подгрупп. *Оператор замыкания*, соответствующий ко-$\mathcal{C}$ топологии $\tau_G^{(\mathcal{C})}$, может быть выражен (с использованием семейства базисных окрестностей нейтрального элемента) следующей формулой:

$$\operatorname{cl}_G^{(\mathcal{C})}(M) = \bigcap\{MN : N \in \mathcal{C}^{**}(G)\};\ M \subseteq G; \tag{17}$$

если класс $\mathcal{C}$ удовлетворяет условиям (C_1) и (C_3), то вторая звездочка над $\mathcal{C}$ в правой части (17) оказывается излишней.

Замыкание (нормальной) подгруппы $M \leqslant G$ снова является (нормальной) подгруппой. *Замкнутые подгруппы* — это те, которые совпадают со своим замыканием; они могут быть охарактеризованы как пересечения семейств открытых подгрупп. Замкнутость подгруппы равносильна ее *$\mathcal{C}$-отделимости* (см. [2, 3, 10]). Всякая замкнутая подгруппа H является пересечением семейства подгрупп вида HN, каждая из которых является открытой.

Замыкание единичной подгруппы $E = \{1\} \leqslant G$ есть не что иное, как аппроксимант

$$\operatorname{cl}_G^{(\mathcal{C})}(E) = R_{\mathcal{C}}(G), \tag{18}$$

являющийся наименьшей замкнутой нормальной подгруппой в G. В дополнение к содержанию пп. 3 и 4 можно отметить, что (в случае псевдомногообразия $\mathcal{C}$) аппроксимант фактор-группы выражается формулой

$$R_{\mathcal{C}}(G/H) = \operatorname{cl}_G^{(\mathcal{C})}(H)/H \tag{19}$$

и что аппроксимант подгруппы содержится (не исключено, что строго) в пересечении этой подгруппы с аппроксимантом всей группы. Из формулы (18) непосредственно усматривается такой хорошо известный факт: фактор-группа G/H является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда нормальная подгруппа H является $\mathcal{C}$-отделимой.

Предложение 10. *Если замкнутая подгруппа G' в группе G является ко-$\mathcal{C}$ наследственной, то любая замкнутая (и в частности, любая открытая) в смысле топологии $\tau_{G'}^{(\mathcal{C})}$ подгруппа $M \leqslant G'$ замкнута во всей группе G.*

Доказательство. Напомним, что предположение о ко-$\mathcal{C}$ наследственности G' выражается равенством топологий (11). Поэтому если подгруппа $M \leqslant G'$ замкнута в ко-$\mathcal{C}$ топологии G', то она будет замкнутой и в индуцированной топологии $(\tau_G^{(\mathcal{C})})'$, а значит, благодаря замкнутости G', — и во всей группе G.

Следующее утверждение является некоторым обобщением предложения 2.3.13 из работы [3].

Предложение 11. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс конечных групп, удовлетворяющий аксиомам (C_1) и (C_3), G — группа, G' — замкнутая (в смысле ко-$\mathcal{C}$ топологии) подгруппа в G. Следующие три утверждения равносильны:*

(i) подгруппа G' является ко-$\mathcal{C}$ наследственной;

(ii) всякая замкнутая (в смысле $\tau_{G'}^{(\mathcal{C})}$) подгруппа в G' является замкнутой в G;

(iii) всякая ко-$\mathcal{C}$ подгруппа группы G' замкнута в G.

Доказательство. Импликация (i)⇒(ii) составляет содержание предложения 10; импликация (ii)⇒(iii) тривиальна, поскольку ко-$\mathcal{C}$ подгруппы открыто-замкнуты; остается доказать (iii)⇒(i).

Пусть подгруппа G' замкнута в G вместе со всеми своими ко-$\mathcal{C}$ подгруппами $M \overset{(\mathcal{C})}{\trianglelefteq} G'$. Докажем, что G' ко-$\mathcal{C}$ наследственна в G. Для этого требуется проверить утверждение (12) для любой $M \in \mathcal{C}^*(G')$.

Если $M = G'$, то в качестве N можно взять всю группу G; поэтому в дальнейшем можно считать подгруппу M собственной ($M \triangleleft G'$).

Тот факт, что $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$, влечет конечность индекса $m = [G' : M]$ ($2 \leqslant m < \infty$). Возьмем систему $\{x_1 = 1, x_2, \dots, x_m\}$ представителей смежных классов группы G' по подгруппе M. Подгруппа M замкнута в группе G, значит, для каждого из представителей x_i ($i = 2, \dots, m$) найдется такая ко-$\mathcal{C}$ подгруппа $N_i \in \mathcal{C}^*(G)$, что $x_i \notin MN_i$. Рассмотрим пересечение $N = \cap_{i=2}^{m} N_i$. Из справедливости для класса $\mathcal{C}$ аксиом (C_1) и (C_3) вытекает, что $N \in \mathcal{C}^*(G)$. Ясно, что $x_i \notin MN$ для любого $i = 2, \dots, m$.

Докажем, что $N \cap G' \subseteq M$. Предположим противное и возьмем любой элемент $y \in (N \cap G') \setminus M$. Этот элемент попадает в некоторый смежный класс $x_{i_0}M$, где $2 \leqslant i_0 \leqslant m$. Следовательно, существует элемент $z \in M$ такой, что $y = x_{i_0}z$. Отсюда получается $x_{i_0} = yz^{-1} \in N_{i_0}M = MN_{i_0}$, что противоречит ранее установленному факту $x_i \notin MN_i$ для любого $i = 2, \dots, m$. Таким образом, фигурирующее в условии (12) включение доказано.

8. $\mathcal{C}$-ретракты и $\mathcal{C}$-квазиретракты. Подгруппа $H \leqslant G$ называется *ретрактом* группы G, если существует эпиморфизм $\rho : G \to H$, сужение которого на H является тождественным автоморфизмом. Определение ретракта можно пересказать следующим равносильным образом: всякий гомоморфизм $\varphi : H \to K$ подгруппы H в произвольную группу K *продолжается* (*распространяется*) на всю группу G, т. е. существует гомоморфизм $\psi : G \to K$ такой, что $\varphi = \psi \circ \iota$, где $\iota : H \to G$ — вложение H в G.

Известно (см., напр., [9]), что ретракт является ко-$\mathcal{C}$ наследственной группой (для произвольного класса $\mathcal{C}$). В самом деле, ко-$\mathcal{C}$ подгруппы суть не что иное, как ядра $\mathcal{C}$-эпиморфизмов (т. е. эпиморфизмов на $\mathcal{C}$-группы);

так что, имея ко-$\mathcal{C}$ подгруппу $M = \mathrm{Ker}(\varphi) \in \mathcal{C}^*(H)$, мы можем продолжить φ до $\mathcal{C}$-эпиморфизма ψ и тогда $N = \mathrm{Ker}(\psi)$ будет ко-$\mathcal{C}$ подгруппой в G такой, что $N \cap H \subseteq M$; тем самым будет обеспечено выполнение условия (12).

Ниже будут определены два новых понятия, родственных понятию ретракта, но привязанных к определенному классу групп.

Сначала модифицируем понятие распространения морфизма применительно к случаю $\mathcal{C}$-эпиморфизмов. *Распространением $\mathcal{C}$-эпиморфизма* $\varphi : H \to K$ с подгруппы $H \leqslant G$ на группу G будем называть $\mathcal{C}$-эпиморфизм $\psi : G \to L$ на $\mathcal{C}$-группу L такой, что существует мономорфизм $\mathcal{C}$-групп $\alpha : K \to L$ и справедливо равенство

$$\psi \circ \iota = \alpha \circ \varphi, \tag{20}$$

где $\iota : H \to G$ и $\alpha : K \to L$ — естественные вложения. Иначе говоря, должна быть коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi} & L \\ \uparrow \iota & & \alpha \uparrow \\ H & \xrightarrow{\varphi} & K. \end{array} \tag{21}$$

Подчеркнем, что продолженный гомоморфизм действует на некоторую “надгруппу” L группы K.

Квазираспространением мы будем называть распространение *с предварительным поднятием*. Точнее, квазираспространением для $\mathcal{C}$-эпиморфизма $\varphi : H \to K$ называется распространение для некоторого *накрывающего* $\mathcal{C}$-эпиморфизма $\varphi' : H \to K'$ на некоторую $\mathcal{C}$-группу K', *накрывающую* K (в том смысле, что существует эпиморфизм $\mathcal{C}$-групп $\pi : K' \to K$ такой, что $\pi \circ \varphi' = \varphi$).

Ситуация полностью описывается следующей, более сложной, коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi} & L \\ \uparrow \iota & & \alpha \uparrow \\ H & \xrightarrow{\varphi'} & K' \\ || & & \pi \downarrow \\ H & \xrightarrow{\varphi} & K. \end{array} \tag{22}$$

Переходим к определению обобщенных ретрактов. *$\mathcal{C}$-ретрактом* (*$\mathcal{C}$-квазиретрактом*) некоторой группы G называется такая подгруппа $H \leqslant G$, любой $\mathcal{C}$-эпиморфизм с которой *распространяется* (*квазираспространяется*) на всю группу G.

Предложение 12. *Пусть $\mathcal{C}$ — абстрактный класс групп, удовлетворяющий (C_1), G — группа, H — подгруппа в G. Из следующих трех утверждений первые два равносильны, и каждое из них влечет третье:*

(i) подгруппа H является $\mathcal{C}$-ретрактом G;

(ii) группа G является $\mathcal{C}$-регулярной по H;

(iii) подгруппа H является ко-$\mathcal{C}$ наследственной.

Доказательство. 1. Импликация (i)⇒(ii). Пусть H — $\mathcal{C}$-ретракт G. Рассмотрим ко-$\mathcal{C}$ подгруппу $M \in \mathcal{C}^*(H)$ и $\mathcal{C}$-эпиморфизм проектирования $\varphi : H \to H/M$ $(K = H/M)$.

В силу (i) существует продолжение $\psi : G \to L$, обеспечивающее коммутативность диаграммы (21). Рассмотрев ядро $N = \mathrm{Ker}(\psi) \in \mathcal{C}^*(G)$, получим (ввиду мономорфности α):

$$N \cap H = \mathrm{Ker}(\psi \circ \iota) = \mathrm{Ker}(\alpha \circ \varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi) = M, \tag{23}$$

что и доказывает регулярность G по H.

2. Обратная импликация (ii)⇒(i). Пусть G — $\mathcal{C}$-регулярна по H, $\varphi : H \to K$ — $\mathcal{C}$-эпиморфизм. Ядро $M = \mathrm{Ker}(\varphi)$ является ко-$\mathcal{C}$ подгруппой; в силу регулярности G по H существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G)$ такая, что $N \cap H = M$. Гомоморфизм φ можно представить в виде композиции $\varphi = \bar{\varphi} \circ \beta$, где $\beta : H \to H/M$ — естественный эпиморфизм проектирования, $\bar{\varphi} : H/M \to K$ — изоморфизм.

Построим $\mathcal{C}$-группу L, эпиморфизм ψ и мономорфизм α, дополняющие φ до коммутативной диаграммы (21). Положим $L = G/N$ (L является $\mathcal{C}$-группой) и рассмотрим изоморфизм

$$\eta : H/M = H/(H \cap N) \overset{\cong}{\to} HN/N;\ \eta(xM) = xN;\ x \in H. \tag{24}$$

Группа HN/N принадлежит $\mathcal{C}$, поскольку изоморфна группе H/M. Рассмотрим мономорфизм $\gamma : HN/N \to G/N$ и, далее, композицию

$$\alpha = \gamma \circ \eta \circ \bar{\varphi}^{-1} : K \to L, \tag{25}$$

также являющуюся мономорфизмом. Равенство (20) проверяется непосредственно; утверждение (i) доказано.

3. Импликация (ii)⇒(iii) установлена ранее: $\mathcal{C}$-регулярность G по H влечет $\mathcal{C}$-квазирегулярность, которая, в силу предложения 6, равносильна ко-$\mathcal{C}$ наследственности.

Предложение 13. *Пусть $\mathcal{C}$ — абстрактный класс групп, удовлетворяющий (C_1), G — группа, H — подгруппа в G. Следующие три утверждения равносильны:*

(i) подгруппа H является $\mathcal{C}$-квазиретрактом G;

(ii) группа G является $\mathcal{C}$-квазирегулярной по H;

(iii) подгруппа H является ко-$\mathcal{C}$ наследственной.

Доказательство. 1. Только что, в конце доказательства предложения 12, отмечалось, что утверждения (ii) и (iii) равносильны. Установим равносильность (i) и (ii).

2. Импликация (i)⇒(ii). Пусть H — $\mathcal{C}$-квазиретракт G. Как и в предыдущем предложении, рассмотрим подгруппу $M \in \mathcal{C}^*(H)$ и проекцию $\varphi : H \to H/M = K$. По предположению существует квазираспространение для φ, описываемое коммутативной диаграммой (22). Обозначим $N = \mathrm{Ker}(\psi)$; эта подгруппа принадлежит $\mathcal{C}^*(G)$, поскольку $G/N \cong L \in \mathcal{C}$. Из равенств $\psi \circ \iota = \alpha \circ \varphi'$ и $\pi \circ \varphi' = \varphi$, с учетом мономорфности α, получаем требуемое для доказательства $\mathcal{C}$-квазирегулярности включение

$$N \cap H = \mathrm{Ker}(\psi \circ \iota) = \mathrm{Ker}(\alpha \circ \varphi') = \mathrm{Ker}(\varphi') \subseteq \mathrm{Ker}(\pi \circ \varphi') = \mathrm{Ker}(\varphi) = M.$$

3. Обратная импликация. Пусть группа G — $\mathcal{C}$-квазирегулярна по H, $\varphi : H \to K$ — $\mathcal{C}$-эпиморфизм. Для $M = \mathrm{Ker}(\varphi) \in \mathcal{C}^*(H)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G)$ такая, что $N \cap H \subseteq M$. Требуется построить (см. диаграмму (22)) две $\mathcal{C}$-группы, K' и L, эпиморфизм $\mathcal{C}$-групп π и мономорфизм $\mathcal{C}$-групп α, а также два $\mathcal{C}$-эпиморфизма, φ' и ψ.

Группа L, как и в предыдущем предложении, определяется формулой $L = G/N$. Для построения K' сначала определим нормальную подгруппу $M' = N \cap H \trianglelefteq H$, а затем положим $K' = H/M'$.

Рассмотрим аналогичный (24) изоморфизм

$$\eta' : H/M' = H/(H \cap N) \overset{\cong}{\to} HN/N;\ \eta'(xM') = xN;\ x \in H, \tag{26}$$

а также вложение $\gamma : HN/N \to G/N$. Мономорфизм $\alpha : K' \to L$ задается как композиция

$$\alpha = \gamma \circ \eta';\ \alpha(xM') = xN;\ x \in H. \tag{27}$$

Из наличия мономорфизма (27) благодаря (C_1) вытекает тот факт, что K' является $\mathcal{C}$-группой. Эпиморфизм φ' определяется как естественная проекция

$$\varphi' : H \to K' = H/M';\ \varphi'(x) = xM';\ x \in H. \tag{28}$$

Фактор-группа M/M' также является $\mathcal{C}$-группой (как подгруппа в группе $K' = H/M'$). Определены еще одна проекция

$$\pi' : H/M' \to (H/M')/(M/M');\ \pi'(xM') = xM'(M/M');\ x \in H \tag{29}$$

и изоморфизм

$$\lambda : H/M \overset{\cong}{\to} (H/M')/(M/M');\ \lambda(xM) = xM'(M/M');\ x \in H. \tag{30}$$

Кроме того, понадобится изоморфизм $\bar{\varphi}$ (фигурировавший и в предыдущем предложении)

$$\bar{\varphi} : H/M \overset{\cong}{\to} K;\ \bar{\varphi}(xM) = \varphi(x);\ x \in H. \tag{31}$$

Эпиморфизм π задается формулой

$$\pi = \bar{\varphi} \circ \lambda^{-1} \circ \pi' : H/M' \to K; \ \pi(xM') = \varphi(x); \ x \in H. \qquad (32)$$

Теперь мы можем проверить коммутативность диаграммы. Для произвольного элемента $x \in H$ с помощью формул (26) — (32) получаем

$$(\alpha \circ \varphi')(x) = \alpha(xM') = xN = \psi(x) = (\psi \circ \iota)(x);$$
$$(\pi \circ \varphi')(x) = \pi(xM') = \varphi(x).$$

Предложение доказано.

9. Благодарности. Авторы считают своим долгом выразить благодарность всем участникам семинара Д. И. Молдаванского по комбинаторной теории групп. Особо хотелось бы отметить активную роль в подготовке данной статьи Е. В. Соколова, взявшего на себя труд по ознакомлению с первоначальным вариантом работы и высказавшего ряд ценных советов и замечаний, обратившего наше внимание на понятия корневого класса групп, регулярности (и квазирегулярности) группы по подгруппе (относительно некоторого класса групп).

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н., Тъеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 5 (2002). С. 6—10.
2. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49—60.
3. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп в некоторых классах конечных групп // Иваново : Иван. гос. ун-т, 2003. 90 с. Деп. в ВИНИТИ 20.07.03, № 1433-В2003.
4. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. М. : Наука, 1975. Т. 1. 656 с.
5. *Яцкин Н. И.* Некоторые аппроксимационные свойства групп, связанные с вербальными подгруппами // Науч.-исслед. деятельность в классич. ун-те : ИвГУ — 2008. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2008. Ч. 1. : Естеств. и технич. науки. С. 21—25.
6. *Coulbois T., Sapir M., Weil P.* A note on the continuous extensions of injective morphisms between free groups to relatively free profinite groups // Publ. Mat. 2003. Vol. 47, № 2. P. 477—487.
7. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.
8. *Lennox J. C., Robinson D. J. S.* The Theory of Infinite Soluble Groups. Oxford : Clarendon Press, 2004. 342 p.
9. *Margolis S., Sapir M., Weil P.* Closed subgroups in pro-V topologies and the extensions problem for inverse automata // Intern. J. Algebra and Computation. 2001. Vol. 11, № 4. P. 405—445.
10. *Ribes L., Zalesskii P.* Profinite Groups. Berlin, etc. : Springer-Verlag, 2010. 464 p.