УДК 517.518.865

А. С. Белов

О ЛОКАЛИЗАЦИИ НУЛЕЙ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Для каждого натурального числа n пусть V_n есть единственный экстремальный тригонометрический полином экстремальной задачи о минимуме свободного члена четного неотрицательного тригонометрического полинома степени n, все коэффициенты которого, кроме свободного члена, не меньше 1. В статье изучаются локализация нулей тригонометрического полинома V_n и асимптотическое поведение некоторых величин, связанных с полиномами $\{V_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Ключевые слова: экстремальные тригонометрические полиномы, нули тригонометрического полинома.

For every positive integer n let V_n be unique extremal trigonometric polynomial of the extremal problem on the minimum of the constant term of even nonnegative trigonometric polynomial of the degree n, with all coefficients without constant term not less 1. In the article the localization of the zeros of the trigonometric polynomial V_n and asymptotic behavior some values which link with the polynomials $\{V_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ are studied.

Key words: extremal trigonometric polynomials, the zeros of the trigonometric polynomial.

Введение

Обозначим

$$c_k = \frac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2} \qquad \text{при} \qquad k \geqslant 0\,. \tag{1}$$

Условимся также, что квадратные скобки далее обозначают целую часть. Тогда четный неотрицательный тригонометрический полином

$$V_n(x) = \frac{1}{2}\,\Big|\sum_{j=0}^{[n/2]} c_j\,e^{ijx} + \sum_{j=[n/2]+1}^{n} c_{n-j}\,e^{ijx}\Big|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^n\,\cos(kx)\,,$$

числа

$$M(n) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=0}^{[n/2]} c_j^2 + \sum_{j=[n/2]+1}^{n} c_{n-j}^2\Big)\,, \tag{2}$$

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k^n = V_n(0) - M(n) \tag{3}$$

и функции

$$f_n(x)=\sum_{j=0}^{[n/2]} c_j\,\cos\Big(\Big(\frac{n}{2}-j\Big)\,x\Big)+\sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} c_j\,\cos\Big(\Big(\frac{n}{2}-j\Big)\,x\Big)\,, \qquad (4)$$

$$g_n(x)=\sum_{j=0}^{[n/2]} 2c_j\,\sin\Big(\Big(\frac{n}{2}-j\Big)\,x\Big) \qquad (5)$$

заданы для каждого натурального числа n, причем

$$V_n(x)=\frac{1}{2}\,|\,f_n(x)\,|^2\,, \qquad (6)$$

$$a_0^n=M(n)\,,\quad a_k^n=1\quad \text{при всех}\quad k=m\,,\,\ldots\,,\,n\,,$$

$$a_k^n=1+2\sum_{j=0}^{m-k-1} c_j(c_{j+k}-c_{n-j-k})\quad \text{при всех}\ \ k=1,\,\ldots\,,\,m\,,$$

где $m=n-[n/2]$. Обозначим через $\mathbb{W}_n$ совокупность всех неотрицательных тригонометрических полиномов T_n вида $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\,\cos(kx)$ таких, что $a_k\geqslant 1$ при всех $k=1,\,\ldots\,,\,n$. Тогда [2, теорема 2] полином V_n является единственным экстремальным полиномом экстремальной задачи $M(n)=\min\{\,a_0:T_n\in\mathbb{W}_n\,\}$. Поэтому представляет интерес изучение полиномов $\{V_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, чему и посвящена эта статья.

Автор доказал [2, теорема 2], что для каждого натурального числа n полином V_n имеет на сегменте $[0,\pi]$ ровно $m=n-[n/2]$ нулей

$$0<x_1^n<\cdots<x_m^n\leqslant\pi\,, \qquad (7)$$

причем $x_m^{2m-1}=\pi$, $x_m^{2m}<\pi$,

$$x_k^n\in\Big(\,\frac{\pi\,(2k-1)}{n+1/2}\,,\,\frac{2\pi\,k}{n+1/2}\,\Big)\quad \text{при всех}\quad k=1,\,\ldots\,,\,m \qquad (8)$$

и [2, формулы (22) и (23)] верно разложение

$$V_n(x)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{[n/2]}(\cos x-\cos x_k^n\,)\prod_{k=1}^{[(n+1)/2]}(\cos x-\cos x_k^n\,)\,,$$

т. е. каждый нуль имеет двойную кратность. В статье [1] автор уточнил расположение нулей (7) полинома V_n, а именно доказал, что для каждого натурального числа n нули (7) полинома V_n удовлетворяют условиям

$$x_k^n\in\Big(\,\frac{\pi\,(2k-1)}{n+1/2}\,,\,\frac{2\pi\,k}{n+1}\,\Big)\quad \text{при всех}\quad k=1,\,\ldots\,,\,[n/2]\,. \qquad (9)$$

Таким образом, оценки (9) уточняют сверху оценки (8). В § 1 мы уточним нижние оценки в (8). Будет доказана

Теорема 1. *Для каждого натурального числа* n *нули* (7) *полинома* V_n *удовлетворяют условиям*

$$x_k^n \in \left(\frac{\pi\,(2k-1)}{n}\,,\ \frac{2\pi\,k}{n+1} \right) \quad \text{при всех} \quad k = 1,\,\ldots,\,[n/2]\,. \tag{10}$$

В § 2 расположение нулей (10) будет еще более уточнено. Здесь будет доказана

Теорема 2. *Для каждого натурального числа* n *и* $k = 1,\,\ldots,\,[n/2]$ *верны оценки*

$$0 < (-1)^k \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(x_k^n - \frac{\pi\,(2k-1/2)}{n+1/2} \right) < \frac{\pi}{2} \tag{11}$$

и

$$(-1)^k \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(x_k^n - \frac{\pi\,(2k-1/2)}{n+1/2} \right) < \frac{(2\pi)^{1/2}}{2(2k-1)^{3/2}}\,. \tag{12}$$

Таким образом, если число $k = 1,\,\ldots,\,[n/2]$ является нечетным, то

$$x_k^n < \frac{\pi\,(2k-1/2)}{(n+1/2)}\,,$$

а если число k четное, то

$$x_k^n > \frac{\pi\,(2k-1/2)}{(n+1/2)}\,.$$

При достаточно больших k оценка (12) существенно уточняет оценку (11). Заметим, что

$$\frac{\pi\,(2k-1)}{n} < \frac{\pi\,(2k-1/2)}{n+1/2} < \frac{2\pi\,k}{n+1} \quad \text{при} \quad k = 1,\,\ldots,\,[n/2]\,. \tag{13}$$

Оценки (10), (13), (11) и (12) дают достаточно ясное представление о расположении нулей (7) полинома V_n .

В § 3 изучается поведение функций $V_n(0)$, $M(n)$ и $\psi(n)$ при больших n . В частности, будет доказана

Теорема 3. *При* $n \to \infty$ *справедливы соотношения*

$$\ln V_n(0) = \ln\left(\frac{4}{\pi} \right) + \ln\left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{(-1)^n}{2(2n+1)^2} + O\left(\frac{1}{n^4} \right), \tag{14}$$

$$V_n(0) = \frac{2(2n+1)}{\pi} - \frac{(-1)^n}{\pi\,(2n+1)} + O\left(\frac{1}{n^3} \right), \tag{15}$$

$$M(n)=\frac{1}{\pi}\,\ln\Bigl(n+\frac{1}{2}\Bigr)+\frac{(C_0+3\ln 2)}{\pi}-\frac{(1+(-1)^n\,12)}{48\pi\,n^2}+O\Bigl(\frac{1}{n^3}\Bigr)\,, \qquad (16)$$

где абсолютная постоянная

$$C_0=\lim_{n\to\infty}\Bigl(\,\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\Bigr) \qquad (17)$$

— известная постоянная Эйлера. Более того, при $n\to\infty$ *справедливы соотношения*

$$\psi(n)=\frac{2(2n+1)}{\pi}-\frac{1}{\pi}\,\ln\Bigl(n+\frac{1}{2}\Bigr)-\frac{(C_0+3\ln 2)}{\pi}-$$
$$-\frac{(-1)^n}{\pi\,(2n+1)}+\frac{(1+(-1)^n\,12)}{12\pi\,(2n+1)^2}+O\Bigl(\frac{1}{n^3}\Bigr)\,, \qquad (18)$$

$$\psi(n+1)-\psi(n)=\frac{4}{\pi}\,\Bigl(1+\frac{((-1)^n-1)}{4n}+\frac{(2-3(-1)^n)}{8\,n^2}\Bigr)+O\Bigl(\frac{1}{n^3}\Bigr)\,. \qquad (19)$$

Теперь перейдем к доказательствам сформулированных теорем.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Пусть n — произвольное натуральное число, $m=n-[n/2]$ и (см. (1))

$$t_n(x)=\sum_{k=1}^{m}(c_{k-1}-c_k)\,\sin(kx)\,,$$

$$u_n(x)=c_m+\sum_{k=1}^{m}(c_{k-1}-c_k)\,(1-\cos(kx))\,.$$

Тогда [1, формулы (1.2) и (1.3)] $u_n(x)>0$ для всех x и $t_n(x)>0$ при всех $x\in(0,\pi)$. Эти оценки дополняет следующая

Лемма 1.1. *Для каждого натурального числа* n *и* $m=n-[n/2]$ *справедливы оценки*

$$\cos\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)\,u_n(x)-\sin\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)\,t_n(x)\geqslant c_m\,\cos\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)\quad \textit{при всех}\quad x\in[0,\pi]\,. \qquad (1.1)$$

В частности,

$$\cos\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)\,u_n(x)-\sin\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)\,t_n(x)>0\quad \textit{при всех}\quad x\in[0,\pi) \qquad (1.2)$$

и

$$\sum_{k=1}^{m}(c_{k-1}-c_k)\,(\sin x\,(1-\cos(kx))-(1-\cos x)\,\sin(kx))\geqslant 0$$
$$\textit{при всех}\quad x\in[0,\pi]\,. \qquad (1.3)$$

Доказательство. При всех x имеем

$$\sum_{k=1}^{m}(c_{k-1}-c_k)\,(\sin x\,(1-\cos(kx))-(1-\cos x)\,\sin(kx))=$$
$$=2\,\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,\Big(\cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\,(u_n(x)-c_m)-\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,t_n(x)\Big)=$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(c_{k-1}-c_k)\,(\sin x-\sin(kx)+\sin((k-1)x))=(c_0-c_m)\,\sin x-$$
$$-(c_m-c_{m+1})\,\sin(mx)-\sum_{k=1}^{m}(c_{k-1}-2c_k+c_{k+1})\,\sin(kx)\,. \tag{1.4}$$

Из (1) следует, что при всех $k\geqslant 1$ верны оценки

$$c_{k-1}-c_k=\frac{c_{k-1}}{2k}=\frac{c_k}{2k-1}>0$$

и

$$c_{k-1}-2c_k+c_{k+1}=\frac{c_k}{(2k-1)}-\frac{c_k}{(2k+2)}=\frac{3c_k}{(2k-1)\,(2k+2)}>0\,.$$

При $x\in[0,\pi]$ индукцией по $k=1\,,2\,,\,\ldots$ получаем оценку $|\sin(kx)|\leqslant k\,\sin x$, которая является строгой при $x\in(0,\pi)$ и $k\geqslant 2$. Отсюда и из (1.4) следует, что

$$2\,\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,\Big(\cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\,(u_n(x)-c_m)-\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,t_n(x)\Big)\geqslant(c_0-c_m)\,\sin x-$$
$$-(c_m-c_{m+1})\,|\sin(mx)|-\sum_{k=1}^{m}(c_{k-1}-2c_k+c_{k+1})\,|\sin(kx)|\geqslant$$
$$\geqslant(c_0-c_m)\,\sin x-(c_m-c_{m+1})\,m\,\sin x-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}(c_{k-1}-2c_k+c_{k+1})\,k\,\sin x=0\,,$$

причем при $m\geq 2$ и $x\in(0,\pi)$ второе неравенство строгое. Отсюда и вытекает (1.1), а из (1.1) следует (1.2). Из первого равенства (1.4) и (1.1) имеем (1.3), причем при $n\geq 3$ и $x\in(0,\pi)$ оценки (1.1) и (1.3) строгие. Лемма 1.1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 1. Для натурального n верно [1, формула (1.4)] равенство

$$\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,f_n(x)=\sin\Big(\frac{(n+1)}{2}\,x\Big)\,u_n(x)+\cos\Big(\frac{(n+1)}{2}\,x\Big)\,t_n(x)=$$
$$=\sin\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,\Big(\cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\,u_n(x)-\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,t_n(x)\Big)+$$
$$+\cos\Big(\frac{nx}{2}\Big)\,\Big(\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,u_n(x)+\cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\,t_n(x)\Big)\,.$$

Отсюда при целых k и $v_k = \pi(2k-1)/n$ получим

$$(-1)^{k-1}\,\sin\Bigl(\frac{v_k}{2}\Bigr)\,f_n(v_k) = \cos\Bigl(\frac{v_k}{2}\Bigr)\,u_n(v_k) - \sin\Bigl(\frac{v_k}{2}\Bigr)\,t_n(v_k)\,.$$

Из этого равенства и из (1.2) при всех $k = 1\,,\ldots,[n/2]$ следует, что $(-1)^{k-1}\,f_n(v_k) > 0$ и $v_k > \pi(2k-1)/(n+1)\,,\ v_k < 2\pi k/(n+1)$. Поскольку на отрезке $[\pi(2k-1)/(n+1)\,, \pi 2k/(n+1)]$ у функции $f_n(x)$ только один нуль x_k^n и функция $(-1)^{k-1}\,f_n(x)$ меняет [1, формулы (1.6) и (1.7)] знак с положительного на отрицательный, то $v_k < x_k^n$, т. е. (10), в силу (9), доказано.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Пусть n — натуральное число и $m = n - [n/2]$. Введем обозначения

$$F_n(x) = \begin{cases} 2\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}\,\cos\bigl(\bigl(k+\frac{1}{2}\bigr)\,x\bigr) & \text{при } n = 2m-1\,, \\ c_m + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{k+m}\,\cos(k\,x) & \text{при } n = 2m \end{cases} \tag{2.1}$$

и

$$G_n(x) = \begin{cases} 2\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}\,\sin\bigl(\bigl(k+\frac{1}{2}\bigr)\,x\bigr) & \text{при } n = 2m-1\,, \\ 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{k+m}\,\sin(k\,x) & \text{при } n = 2m\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Пусть $\Delta^0 c_k = c_k$, $\Delta^{\nu+1}c_k = \Delta^\nu c_k - \Delta^\nu c_{k+1}$ при $\nu \geqslant 0\,,\ k \geqslant 0$.

Лемма 2.1. *При всех целых $\nu \geqslant 0\,,\ k \geqslant 0$ верно равенство*

$$\Delta^\nu c_k = c_\nu\,c_k\,\frac{k!\,\nu!}{(k+\nu)!}\,. \tag{2.3}$$

Доказательство. При $\nu = 0$ формула (2.3) верна при всех $k \geqslant 0$. Пусть для некоторого $\nu \geqslant 0$ формула (2.3) верна при всех $k \geqslant 0$. Тогда

$$\Delta^{\nu+1}c_k = \Delta^\nu c_k - \Delta^\nu c_{k+1} = c_\nu\,\frac{k!\,\nu!}{(k+\nu+1)!}\,\bigl((k+\nu+1)\,c_k - (k+1)\,c_{k+1}\bigr)\,.$$

Из (1) следует, что $(k+1)\,c_{k+1} = (k+1/2)\,c_k$. Поэтому при всех $k \geqslant 0$ получаем

$$\Delta^{\nu+1}c_k = c_\nu\,\frac{k!\,\nu!}{(k+\nu+1)!}\,c_k\,(\nu+1/2) = c_{\nu+1}\,\frac{k!\,(\nu+1)!}{(k+\nu+1)!}\,c_k\,.$$

По принципу математической индукции формула (2.3) доказана.

Лемма 2.2. *При всех $x \in (0, 2\pi)$ верны формулы*

$$2\,\sin^2\Big(\frac{x}{2}\Big)\,F_{2m-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Delta^2 c_{k+m}\,\Big(\cos\Big(\frac{x}{2}\Big) - \cos\Big(\Big(k+\frac{3}{2}\Big)\,x\Big)\Big)\,, \quad (2.4)$$

$$4\,\sin^3\Big(\frac{x}{2}\Big)\,F_{2m-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Delta^3 c_{k+m}\,(\,(k+2)\,\sin x - \sin((k+2)\,x)\,)\,, \quad (2.5)$$

$$2\,\sin^2\Big(\frac{x}{2}\Big)\,F_{2m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Delta^2 c_{k+m}\,(1-\cos((k+1)\,x)\,)\,, \quad (2.6)$$

$$\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,G_{2m-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Delta c_{k+m}\,(1-\cos((k+1)\,x)\,)\,, \quad (2.7)$$

$$2\,\sin^2\Big(\frac{x}{2}\Big)\,G_{2m}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Delta^2 c_{k+m}\,(\,(k+1)\,\sin x - \sin((k+1)\,x)\,)\,. \quad (2.8)$$

В частности,

$$F_n(x) > 0 \quad \text{и} \quad G_n(x) > 0 \quad \text{при} \;\; x \in (0,\pi)\,. \quad (2.9)$$

Доказательство. Из (2.1) и (2.2), делая преобразование Абеля, получаем равенство (2.7). Делая преобразование Абеля два или три раза, получаем равенства (2.4), (2.6), (2.8) и (2.5). Поскольку $(k+1)\sin x - \sin((k+1)\,x) > 0$ при $x \in (0,\pi)$ и $k \geqslant 1$, то из (2.5)—(2.8) вытекают оценки (2.9). Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *При всех $x \in (0, 2\pi)$ справедливы равенства*

$$f_n(x) = \frac{2^{1/2}}{\sqrt{\sin(x/2)}}\,\cos\Big(\frac{(2n+1)x}{4} - \frac{\pi}{4}\Big) - F_n(x) \quad (2.10)$$

и

$$g_n(x) = \frac{2^{1/2}}{\sqrt{\sin(x/2)}}\,\sin\Big(\frac{(2n+1)x}{4} - \frac{\pi}{4}\Big) + G_n(x)\,. \quad (2.11)$$

В частности,

$$f_n\Big(\frac{\pi\,(2j-1/2)}{n+1/2}\Big) < 0 \quad \text{при} \;\; j = 1\,,\,\ldots\,,\,[n/2] \quad (2.12)$$

и

$$g_n\Big(\frac{\pi\,(2j+1/2)}{n+1/2}\Big) > 0 \quad \text{при} \;\; j = 0\,,\,\ldots\,,\,m-1\,. \quad (2.13)$$

Доказательство. Пусть $r \in [0,1)$, $x \in (0, 2\pi)$ и $z = r\, \exp(ix)$. Тогда $(1-z)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k$, где выбрана такая ветвь корня, что $1^{-1/2} = 1$. Устремляя здесь r к 1, получим равенство

$$\frac{\exp(i(\pi - x)/4)}{\sqrt{2\,\sin(x/2)}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \exp(ikx)\,.$$

Поэтому

$$\frac{\exp(i((2n+1)x/4 - \pi/4))}{\sqrt{2\,\sin(x/2)}} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, \exp(i(n/2 - j)x)\,.$$

Отсюда и из (4) и (5) при $n = 2m-1$ имеем

$$f_n(x) + ig_n(x) = \sum_{j=0}^{m-1} 2c_j\, \exp(i(n/2 - j)x) =$$

$$= \frac{2\exp(i((2n+1)x/4 - \pi/4))}{\sqrt{2\,\sin(x/2)}} - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_{k+m}\, \exp(-i(k+1/2)x)\,,$$

т. е., в силу (2.1) и (2.2), формулы (2.10) и (2.11). Если $n = 2m$, то из (4) и (5) получим

$$f_n(x) + ig_n(x) = c_m + \sum_{j=0}^{m-1} 2c_j\, \exp(i(m - j)x) =$$

$$= \frac{2\exp(i((2n+1)x/4 - \pi/4))}{\sqrt{2\,\sin(x/2)}} + c_m - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_{k+m}\, \exp(-ikx)\,,$$

т. е. опять верны формулы (2.10) и (2.11). Из (2.10) и (2.11) получим

$$f_n\Big(\frac{\pi\,(2j - 1/2)}{n + 1/2}\Big) = -F_n\Big(\frac{\pi\,(2j - 1/2)}{n + 1/2}\Big) \quad \text{при} \ \ j = 1\,, \ldots, n$$

и

$$g_n\Big(\frac{\pi\,(2j + 1/2)}{n + 1/2}\Big) = G_n\Big(\frac{\pi\,(2j + 1/2)}{n + 1/2}\Big) \quad \text{при} \ \ j = 0\,, \ldots, n\,.$$

Отсюда и из (2.9) сразу следуют (2.12) и (2.13). Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. *Справедлива оценка*

$$c_k\, \pi^{1/2}\, (k + 1/4)^{1/2} < 1 \quad \text{\textit{при всех}} \quad k \geqslant 0\,. \tag{2.14}$$

Доказательство. При $k \geqslant 0$ из (1) имеем

$$\Big(k + \frac{5}{4}\Big)\, c_{k+1}^2 = \Big(k + \frac{5}{4}\Big)\, \Big(1 - \frac{1}{2(k+1)}\Big)^2 c_k^2 > \Big(k + \frac{1}{4}\Big)\, c_k^2\,.$$

Поэтому последовательность $\{(k+1/4)\,c_k^2\}_{k=0}^{\infty}$ строго возрастает и, в силу известной формулы Стирлинга, стремится к $1/\pi$. Следовательно, $(k+1/4)\,c_k^2<1/\pi$, т. е. (2.14) доказано.

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$y_k=(-1)^k\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(x_k^n-\frac{\pi\,(2k-1/2)}{n+1/2}\right)\quad\text{при}\quad k=1\,,\,\ldots\,,\,m\,.$$

Из (8) вытекает, что всегда $|y_k|<\pi/2$. Поскольку (6) и [1, формулы (1.6) и (1.7)] при $k=1\,,\,\ldots\,,\,[n/2]$ функция $(-1)^k f_n(x)$ имеет на отрезке $[\pi\,(2k-1)/(n+1),2\pi\,k/(n+1)]$ единственный нуль x_k^n и меняет знак с отрицательного на положительный, то в силу (2.12), (10) и (13) $\pi\,(2k-1/2)/(n+1/2)>x_k^n$ при нечетных k и $\pi\,(2k-1/2)/(n+1/2)<x_k^n$ при четных k. Поэтому $y_k>0$ при $k=1,\,\ldots\,,\,[n/2]$, т. е. (11) доказано. Поскольку $\sin(y_k/2)=\cos((2n+1)x_k^n/4-\pi/4)$, то из (2.10) получаем, что

$$2\,\sin(y_k/2)=(2\,\sin(x_k^n/2))^{1/2}\,F_n(x_k^n)\,.$$

Из (2.4) и (2.6) следует, что

$$2\,\sin^2\!\left(\frac{x_k^n}{2}\right)F_n(x_k^n)\leqslant 2\,\Delta c_m=\frac{c_m}{m+1}\,.$$

Значит,

$$\left(2\,\sin\!\left(\frac{x_k^n}{2}\right)\right)^{3/2}\sin\!\left(\frac{y_k}{2}\right)\leqslant\frac{c_m}{m+1}\quad\text{при}\quad k=1\,,\,\ldots\,,\,[n/2]\,.\tag{2.15}$$

Но $\sin(y_k/2)>\sqrt{2}\,y_k/\pi$ и $\sin(x_k^n/2)\geqslant x_k^n/\pi$. Поэтому из (2.15) и (2.14) вытекает, что $(m+1)\,\pi^{1/2}\,(m+1/4)^{1/2}\,(\,2\,x_k^n/\pi\,)^{3/2}\,\sqrt{2}\,y_k/\pi<1$, т. е. в силу (10)

$$\frac{\pi^{1/2}}{y_k}>4\left(\frac{x_k^n}{\pi}\right)^{3/2}(m+1)\left(m+\frac{1}{4}\right)^{1/2}>4\left(\frac{2k-1}{n}\right)^{3/2}\left(m+\frac{1}{4}\right)^{3/2}>$$
$$>\sqrt{2}\,(2k-1)^{3/2}\quad\text{при}\quad k=1\,,\,\ldots\,,\,[n/2]\,.$$

Отсюда имеем (12). Теорема 2 полностью доказана.

§ 3. Некоторые асимптотические оценки

Числа Бернулли $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ определяются из разложения

$$h(x)=\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}-1=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\frac{B_k}{(2k)!}\,x^{2k}\,,\tag{3.1}$$

справедливого при всех $|x|<2\,\pi$, а числа Эйлера $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ задаются разложением

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}}-1=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{E_k}{(2k)!}\,x^{2k}\,,\quad\text{где}\quad |x|<\frac{\pi}{2}\,.\tag{3.2}$$

Асимптотику чисел (1) дает следующая

Лемма 3.1. *Для любого целого $\nu \geqslant 0$ при $k \to \infty$ верны асимптотические соотношения*

$$\ln(c_k^2) = -\ln(\pi\, k) + \sum_{s=1}^{\nu} (-1)^s\, (2 - 2^{1-2s})\, \frac{B_s}{s(2s-1)}\, \frac{1}{k^{2s-1}} + O(k^{-2\nu-1})\,; \quad (3.3)$$

$$\ln(c_k^2) = -\ln(\pi\,(2k+1)) + \ln 2 + \\ + \sum_{s=1}^{\nu} (-1)^{s-1}\, (2^{2s}-1)\, \frac{B_s}{s(2s-1)}\, \frac{1}{(2k+1)^{2s-1}} + O(k^{-2\nu-1})\,; \quad (3.4)$$

$$\ln(c_k^2) = -\ln(\pi\,(2k-1)) + \ln 2 + \sum_{s=1}^{\nu} \frac{1}{s}\, \frac{1}{(2k-1)^{2s}} - \\ - \sum_{s=1}^{\nu} \Big(\frac{2}{2s-1} + (-1)^s\, \frac{(2^{2s}-1)\, B_s}{s(2s-1)} \Big)\, \frac{1}{(2k-1)^{2s-1}} + O(k^{-2\nu-1})\,; \quad (3.5)$$

$$\ln(c_k^2) = -\ln(\pi\,(4k+1)) + \ln 4 + \sum_{s=1}^{\nu} (-1)^s\, \frac{E_s}{2s}\, \frac{1}{(4k+1)^{2s}} + O(k^{-2\nu-1})\,. \quad (3.6)$$

Доказательство. Сначала докажем, что при всех натуральных j справедливы равенства

$$\frac{1}{j!} + \sum_{r=1}^{[(j+1)/2]} \frac{(-1)^r\, 2B_r\, (2^{2r}-1)}{(2r)!\, (j+1-2r)!} = \begin{cases} \frac{(-1)^{s-1}\, 2B_s\, (2^{2s}-1)}{(2s)!} & \text{при } j = 2s-1\,, \\ 0 & \text{при } j = 2s \end{cases} \quad (3.7)$$

и

$$\frac{1}{j!} + \sum_{r=1}^{[(j+1)/2]} (-1)^r\, \frac{B_r\, (2^{2r}-1)\, 2^{2r}}{(2r)!\, (j+1-2r)!} = \begin{cases} (-1)^s\, \frac{E_s}{(2s)!} & \text{при } j = 2s\,, \\ 0 & \text{при } j = 2s-1\,. \end{cases} \quad (3.8)$$

Действительно, из (3.1) при $|x| < \pi$ имеем

$$\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1}\, \frac{2B_s\, (2^{2s}-1)}{(2s)!}\, x^{2s} = 2h(2x) - 2h(x) = e^x\, (2h(x) - 2h(2x)) + \\ + x(e^x - 1) = \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} \Big) \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, \frac{2B_k\, (2^{2k}-1)}{(2k)!}\, x^{2k} \Big) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j+1}}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{j!} + \sum_{r=1}^{[(j+1)/2]} (-1)^r\, \frac{2B_r\, (2^{2r}-1)}{(2r)!\, (j+1-2r)!} \Big)\, x^{j+1}\,.$$

Приравнивая здесь в первом и последнем разложениях соответствующие коэффициенты, получаем равенства (3.7).

Из (3.1) и (3.2) при $|x| < \pi/2$ выводим

$$\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s+1} = \frac{2x\, e^x}{e^{2x}+1} - x = e^x\,(h(2x) - h(4x)) +$$
$$+ x(e^x - 1) = \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k\,(2^{2k}-1)\,2^{2k}}{(2k)!} x^{2k}\Big) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j+1}}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{j!} + \sum_{r=1}^{[(j+1)/2]} (-1)^r \frac{B_r\,(2^{2r}-1)\,2^{2r}}{(2r)!\,(j+1-2r)!}\Big) x^{j+1}.$$

Из сравнения соответствующих коэффициентов получаем равенства (3.8).

По известной формуле Стирлинга

$$2\,\ln(k!) = \ln(2\pi) + (2k+1)\,\ln k - 2k +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\nu} (-1)^{s-1} \frac{B_s}{s(2s-1)} \frac{1}{k^{2s-1}} + O(k^{-2\nu-1}).$$

Отсюда, из (1) и соотношения $\ln(c_k^2) = 2\,\ln((2k)!) - 4k\,\ln 2 - 4\,\ln(k!)$ сразу выводим (3.3). Из (3.3) при любом вещественном θ имеем

$$\ln(c_k^2) = \sum_{s=1}^{\nu} (-1)^s \frac{2B_s\,(1-2^{-2s})}{s(2s-1)} \frac{1}{(k+\theta)^{2s-1}} \Big(1 - \frac{\theta}{k+\theta}\Big)^{1-2s} -$$
$$- \ln(\pi\,(k+\theta)) - \ln\Big(1 - \frac{\theta}{k+\theta}\Big) + O(k^{-2\nu-1}) = -\ln(\pi\,(k+\theta)) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{q=0}^{2\nu} (-1)^s \frac{2B_s\,(1-2^{-2s})}{s(2s-1)} \frac{(2s-2+q)!}{(2s-2)!\,q!} \Big(\frac{\theta}{k+\theta}\Big)^q \frac{1}{(k+\theta)^{2s-1}} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2\nu} \frac{1}{j} \Big(\frac{\theta}{k+\theta}\Big)^j + O(k^{-2\nu-1}) = -\ln(\pi\,(k+\theta)) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2\nu} \Big(\frac{1}{j!} + \sum_{r=1}^{[(j+1)/2]} (-1)^r \frac{4B_r\,(1-2^{-2r})\theta^{1-2r}}{(2r)!\,(j+1-2r)!}\Big) \frac{(j-1)!\,\theta^j}{(k+\theta)^j} + O(k^{-2\nu-1}).$$

Если здесь возьмем $\theta = 1/2$ и используем (3.7), то получим (3.4), а если возьмем $\theta = 1/4$ и применим (3.8), то получим (3.6). Наконец, из соотношения $\ln(c_k^2) = \ln(c_{k-1}^2) - 2\,\ln\big(1 + \frac{1}{2k-1}\big)$ и из (3.4), где вместо индекса k берется индекс $k-1$, сразу получаем (3.5). Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Верно равенство:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\pi c_k^2 - \frac{1}{k+1}\Big) = 4\ln 2.$$

Доказательство. Действительно, при $r \in [0,1)$ и действительном x верно разложение $(1 - re^{ix})^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, r^k\, e^{ikx}$. По равенству Парсеваля

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{|1 - re^{ix}|} = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2\, r^{2k}\,.$$

Пусть функция

$$h(r,x) = \frac{r^2}{((1-r)^2 + 4r\, \sin^2(x/2))^{1/2}} - \frac{1}{((1-r)^2 + r\, x^2)^{1/2}}\,.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\pi c_k^2 - \frac{1}{k+1} \Big)\, r^{2k+2} = \ln(1 - r^2) + r^2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{|1 - re^{ix}|} = \\
&= \int_0^{\pi} h(r,x)\, dx + \int_0^{\pi} \frac{dx}{((1-r)^2 + r\, x^2)^{1/2}} + \ln(1 - r^2) = \\
&= r^{-1/2}\, \ln(\pi\, r^{1/2} + ((1-r)^2 + r\, \pi^2)^{1/2}) + \\
&+ (1 - r^{-1/2})\, \ln(1 - r) + \ln(1 + r) + \int_0^{\pi} h(r,x)\, dx
\end{aligned}$$

и, значит,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\pi c_k^2 - \frac{1}{k+1} \Big) = \ln(4\,\pi) + \lim_{r \to 1-0} \int_0^{\pi} h(r,x)\, dx\,.$$

Но функция

$$h(r,x) = \frac{1}{((1-r)^2 + 4r \sin^2(x/2))^{1/2}} \Big(-(1-r^2) + \frac{r(x^2 - 4\sin^2(x/2))}{((1-r)^2 + rx^2)^{1/2}\, (((1-r)^2 + 4r\sin^2(x/2))^{1/2} + ((1-r)^2 + rx^2)^{1/2})} \Big)$$

ограничена в совокупности при всех $r \in [0,1)$ и $x \in [0,\pi]$, поскольку $2x/\pi \leqslant 2\sin(x/2) \leqslant x$, $x - 2\sin(x/2) = \int_0^x 2\sin^2\big(\frac{t}{4}\big)\, dt \leqslant \int_0^x \frac{t^2}{8}\, dt = \frac{x^3}{24}$, $|h(r,x)| \leqslant (1-r)^{-1}$,

$$|h(r,x)| \leqslant 1 + r + \frac{x^4}{12\,((1-r)^2 + rx^2)\,(\,((1-r)^2 + 4r\sin^2(x/2))^{1/2}}\,,$$

и поэтому $|h(r,x)| \leqslant 2$ при $r \leqslant 1/2$,

$$|h(r,x)| \leqslant 2 + \frac{x^2}{6\sqrt{2}\, \sin(x/2)} \leqslant 2 + \frac{\pi x \sqrt{2}}{12} < 4 \quad \text{при} \quad r > 1/2\,,$$

т. е. $|h(r,x)| < 4$ при $r \in [0,1)$ и $x \in [0,\pi]$. Следовательно,

$$\lim_{r\to 1-0} \int_0^\pi h(r,x)\,dx = \int_0^\pi \Big(\frac{1}{2\,\sin(x/2)} - \frac{1}{x} \Big)\,dx = \ln 4 - \ln \pi\,.$$

В результате отсюда выводим $\sum_{k=0}^{\infty} \big(\pi c_k^2 - \frac{1}{k+1} \big) = 2\,\ln 4$. Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. *Для каждого целого $\nu \geqslant 0$ при натуральных $n \to \infty$ верны асимптотические соотношения*

$$\ln V_n(0) = \ln\Big(\frac{2}{\pi}\,(2n+1) \Big) + \\ + (-1)^n \sum_{s=1}^{\nu} (-1)^s \,\frac{E_s}{2s}\, \frac{1}{(2n+1)^{2s}} + O((2n+1)^{-2\nu-1})\,; \tag{3.9}$$

$$\ln V_n(0) = \ln\Big(\frac{4}{\pi}\,n \Big) - (1+(-1)^n\,) \sum_{s=1}^{\nu} \frac{1}{s\,2^{2s+1}}\,\frac{1}{n^{2s}} + \\ + \sum_{s=1}^{\nu} \Big(\frac{(1+(-1)^n\,)}{(2s-1)\,2^{2s-1}} + (-1)^{n+s}\,\frac{B_s\,(2^{2s}-1)}{s(2s-1)} \Big)\,\frac{1}{n^{2s-1}} + O(n^{-2\nu-1})\,. \tag{3.10}$$

Доказательство. Пусть сначала $n = 2m$. Тогда [1, формула (21)] $\ln V_n(0) = 2\,\ln(4m+1) - \ln 2 + \ln(c_m^2)$. Отсюда и из (3.6) сразу получаем (3.9), а из равенства $\ln V_n(0) = 2\,\ln(2m) + 2\,\ln\big(1 + \frac{1}{4m}\big) + \ln 2 + \ln(c_m^2)$ и (3.3) немедленно вытекает (3.10).

Теперь предположим, что $n = 2m-1$. Тогда [1, формула (21)] $\ln V_n(0) = 2\,\ln(2m-1) + 2\,\ln\big(1 + \frac{1}{2m-1}\big) + \ln 2 + \ln(c_m^2)$. Отсюда и из (3.5) сразу вытекает соотношение (3.10), которое можно также записать в виде

$$\ln V_n(0) = \ln\Big(\frac{2}{\pi}\,(2n+1) \Big) + \\ + (-1)^n \Big(\sum_{s=1}^{\nu} \Big(\frac{1}{(2s-1)\,2^{2s-1}} + (-1)^s\,\frac{B_s\,(2^{2s}-1)}{s(2s-1)} \Big)\,\frac{1}{n^{2s-1}} - \\ - \sum_{s=1}^{\nu} \frac{1}{s\,2^{2s+1}}\,\frac{1}{n^{2s}} \Big) + O(n^{-2\nu-1})\,. \tag{3.11}$$

Поскольку при четном n соотношения (3.9) и (3.10) доказаны, то соотношение

$$\sum_{s=1}^{\nu} \Big(\frac{1}{(2s-1)\,2^{2s-1}} + (-1)^s\,\frac{B_s\,(2^{2s}-1)}{s(2s-1)} \Big)\,\frac{1}{n^{2s-1}} - \\ - \sum_{s=1}^{\nu} \frac{1}{s\,2^{2s+1}}\,\frac{1}{n^{2s}} = \sum_{s=1}^{\nu} (-1)^s\,\frac{E_s}{2s}\,\frac{1}{(2n+1)^{2s}} + O((2n+1)^{-2\nu-1})$$

верно, когда $n \to \infty$ по всем натуральным числам n. Поэтому из (3.11) вытекает (3.9) при всех натуральных $n \to \infty$. Лемма 3.3 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть n — произвольное натуральное число, $m = n - [n/2]$. Тогда $4m = 2n + 1 - (-1)^n$. Поскольку $E_1 = 1$, то из (3.9) при $\nu = 2$ сразу получаем (14). Из (14) следует, что

$$V_n(0) = \frac{2}{\pi}\,(2n+1)\,\exp\Big(-\frac{(-1)^n}{2(2n+1)^2}\Big) + O(n^{-3}),$$

а отсюда немедленно вытекает (15).

Поскольку [1, формулы (21) и (24)]

$$\psi(n+1) - \psi(n) = \frac{2V_n(0)}{n+1+2m} = \frac{4V_n(0)}{4n+3-(-1)^n},$$

то из (15) получаем

$$\begin{aligned}
&\psi(n+1) - \psi(n) = \\
&= \frac{2}{\pi\,(2n+1)}\Big(1 + \frac{1-(-1)^n}{2(2n+1)}\Big)^{-1}\Big(2(2n+1) - \frac{(-1)^n}{(2n+1)}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big) = \\
&= \frac{4}{\pi}\Big(1 - \frac{(1-(-1)^n)}{2(2n+1)} + \frac{(1-2(-1)^n)}{2\,(2n+1)^2} - \frac{3\,(1-(-1)^n)}{4\,(2n+1)^3}\Big) + O(n^{-4}),
\end{aligned}$$

а отсюда следует (19).

Из (1) и (2) имеем

$$\begin{aligned}
M(2m-1) &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k^2 = \frac{\ln(2m)}{\pi} + \frac{1-\ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\pi c_k^2 - \frac{1}{k+1}\Big) + \\
&+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+1} + \ln\Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big)\Big) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=m}^{\infty}\Big(\pi c_k^2 + \ln\Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Так как в силу (17)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+1} + \ln\Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\Big) = C_0 - 1,$$

то по лемме 3.2 получаем

$$M(2m-1) = \frac{\ln(2m)}{\pi} + \frac{(C_0 + 3\ln 2)}{\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=m}^{\infty}\Big(\pi c_k^2 + \ln\Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big)\Big).$$

Поскольку $B_1 = 1/6$, то из (3.4) при $\nu = 2$ имеем

$$\begin{aligned}
\pi\, c_k^2 &= \frac{2}{(2k+1)}\,\exp\Big(\frac{1}{2(2k+1)}\Big) + O\Big(\frac{1}{k^4}\Big) = \\
&= \frac{2}{(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4(2k+1)^3} + O\Big(\frac{1}{k^4}\Big).
\end{aligned}$$

Так как

$$\ln\Big(1-\frac{1}{k+1}\Big)=\ln\Big(1-\frac{1}{2k+1}\Big)-\ln\Big(1+\frac{1}{2k+1}\Big)=$$
$$=-\frac{2}{(2k+1)}-\frac{2}{3(2k+1)^3}+O\Big(\frac{1}{k^4}\Big),$$

то

$$\pi c_k^2+\ln\Big(1-\frac{1}{k+1}\Big)=\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{5}{12(2k+1)^3}+O\Big(\frac{1}{k^4}\Big)=$$
$$=\Big(\frac{19}{96(2k-1)}+\frac{29}{96(2k+1)}\Big)-\Big(\frac{19}{96(2k+1)}+\frac{29}{96(2k+3)}\Big)+O\Big(\frac{1}{k^4}\Big).$$

Поэтому

$$\sum_{k=m}^{\infty}\Big(\pi c_k^2+\ln\Big(1-\frac{1}{k+1}\Big)\Big)=\frac{19}{96(2m-1)}+\frac{29}{96(2m+1)}+O\Big(\frac{1}{m^3}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2(2m-1)}-\frac{29}{48(2m-1)^2}+O\Big(\frac{1}{m^3}\Big).$$

Следовательно,

$$M(2m-1)=\frac{\ln(2m-1/2)}{\pi}+\frac{(C_0+3\ln 2)}{\pi}+\frac{1}{\pi}\ln\Big(1+\frac{1}{2m-1}\Big)-$$
$$-\frac{1}{\pi}\ln\Big(1+\frac{1}{2(2m-1)}\Big)-\frac{1}{2\pi\,(2m-1)}+\frac{29}{48\pi\,(2m-1)^2}+O\Big(\frac{1}{m^3}\Big),$$

а это и есть (16) при $n=2m-1$. Поскольку [1, формулы (21) и (23)]

$$M(2m)=M(2m-1)+\frac{V_{2m-1}(0)}{(4m)^2}=\frac{\ln(2m+1/2)}{\pi}-\frac{1}{\pi}\ln\Big(1+\frac{1}{4m}\Big)+$$
$$+\frac{(C_0+3\ln 2)}{\pi}-\frac{1}{2\pi\,(2m-1)}+\frac{29}{48\pi\,(2m-1)^2}+\frac{V_{2m-1}(0)}{(4m)^2}+O\Big(\frac{1}{m^3}\Big)$$

и в силу (15) $V_{2m-1}(0)=2(4m-1)/\pi+O(m^{-1})$, то отсюда сразу получаем (16) при $n=2m$. Из (3), (15) и (20) вытекает (18). Теорема 3 доказана.

Библиографический список

1. *Белов А. С.* Об одной последовательности неотрицательных тригонометрических полиномов // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 104—114.
2. *Белов А. С.* Об одной экстремальной задаче о минимуме тригонометрического полинома // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 6. С. 212—226.