УДК 512.543

А. В. Розов

О ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП С НОРМАЛЬНЫМИ ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Доказано, что свободное произведение двух конечно порожденных нильпотентных групп с нормальными объединенными подгруппами почти аппроксимируемо конечными p-группами для любого простого числа p.

Ключевые слова: конечно порожденная нильпотентная группа, обобщенное свободное произведение групп, почти аппроксимируемость конечными p-группами.

We prove that for any prime p the free product of two finitely generated nilpotent groups with normal amalgamated subgroups is a virtually residually a finite p-groups.

Key words: finitely generated nilpotent group, generalized free product, virtually residuallity a finite p-groups.

1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента x отличен от единицы. Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, где p — простое число, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп. Здесь будет рассмотрено свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, являющееся промежуточным между финитной аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью. Намомним, что группа G называется почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой, если она содержит $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Примером финитно аппроксимируемой группы является произвольная полициклическая группа. Более того, любая полициклическая группа почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p [6]. В частности, любая конечно порожденная нильпотентная группа обладает этим свойством.

Перейдем теперь к свободным произведениям с объединенными подгруппами. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому далее будем считать, что A и B — подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее для группы G будем использовать более компактное обозначение $G = (A * B, H)$ и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости) группы G является финитная аппроксимируемость ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость) групп A и B. Несложные примеры показывают, что перечисленные условия не являются достаточными.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости) группы G состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости), накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения, как правило, накладываются и на объединенную подгруппу H. Примером таких ограничений может служить конечность подгруппы H, ее цикличность, конечность индексов подгруппы H в группах A и B, а также нормальность подгруппы H в группах A и B.

Г. Баумслаг доказал, что если группы A и B финитно аппроксимируемы, а объединенная подгруппа H конечна, то группа G финитно аппроксимируема [7]. Простые примеры показывают, что этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. С другой стороны, в работе [2] доказано, что свободное произведение почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп с конечной объединенной подгруппой является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой. В частности, свободное произведение двух полициклических групп с конечной объединенной подгруппой почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемо для каждого простого p.

В работе Д. Н. Азарова [1] получен критерий финитной аппроксимируемости свободного произведения двух полициклических групп с объединенной подгруппой конечного индекса. Там же доказано, что для такого свободного произведения условие финитной аппроксимируемости равносильно условию почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для всех простых p.

Еще одним естественным ограничением, накладываемым на подгруппу H, является ее нормальность в группах A и B. Именно такое ограничение мы будем рассматривать в данной статье. Г. Баумслаг доказал, что если группы A и B являются полициклическими, а подгруппа H нормальна в группах A и B, то группа G финитно аппроксимируема [7]. Этот результат не может быть распространен с финитной аппроксимируемости на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость. Иными словами, если A и B являются полициклическими $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемыми группами и объединенная подгруппа H нормальна в группах A и B, то группа G уже не обязана быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

Иначе дело обстоит с почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью. Для свободного произведения конечно порожденных нильпотентных групп с нормальной объединенной подгруппой здесь будет доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть G — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Тогда группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для любого простого числа p.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть G — конечно порожденная группа. Тогда любая нормальная подгруппа H конечного индекса (конечного p-индекса) группы G содержит некоторую характеристическую подгруппу N группы G конечного индекса (конечного p-индекса).*

Доказательство. Обозначим через N пересечение всех нормальных подгрупп группы G, индекс которых совпадает с $[G : H]$. Число таких подгрупп конечно [4, с. 250], и потому N является искомой подгруппой. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть H — нильпотентная группа, L_0 — ее характеристическая подгруппа конечного индекса и p — простое число. Тогда в группе H существует характеристическая подгруппа L такая, что $L_0 \subseteq L$, индекс $[L : L_0]$ является степенью числа p, а индекс $[H : L]$ взаимно прост с p.*

Доказательство. По условию леммы H/L_0 — конечная нильпотентная группа. Хорошо известно (см., напр., [3, п. 17.1.4]), что любая конечная нильпотентная группа раскладывается в прямое произведение своих примарных компонент. Поэтому

$$H/L_0 = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n, \tag{1}$$

где H_i — примарные p_i-компоненты для каждого $i = 1, \ldots, n$. При этом все p_i — простые попарно различные числа. Если среди p_i нет числа p, то в качестве L, очевидно, можно взять L_0.

В противном случае пусть, для определенности, H_1 — примарная p-компонента. Так как H_1 — подгруппа фактор-группы H/L_0, то в группе H существует подгруппа L такая, что $H_1 = L/L_0$. Очевидно, что L/L_0 характеристична в H/L_0. Отсюда и из того, что L_0 — характеристическая подгруппа группы H, непосредственно следует, что подгруппа L характеристична в H. Так как $L/L_0 = H_1$ — p-компонента группы H/L_0 и $[H : L] = [H/L_0 : L/L_0]$, то в силу разложения (1) следует, что индекс $[H : L]$ взаимно прост с p. Таким образом, L — искомая подгруппа. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с объединенными относительно изоморфизма φ подгруппами H и K, M и N — нормальные подгруппы групп A и B соответственно. И пусть $(M \cap H)\varphi = N \cap K$. Тогда отображение φ_{MN}, сопоставляющее каждому элементу hM из HM/M элемент $h\varphi N$ из KN/N, является изоморфизмом. Пусть*

$$G_{MN} = (A/M * B/N; HM/M = KN/N, \varphi_{MN})$$

— свободное произведение групп A/M и B/N с подгруппами HM/M и KN/N, объединенными относительно изоморфизма φ_{MN}. Тогда естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$ могут быть продолжены до гомоморфизма $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$.

Это утверждение хорошо известно и легко проверяется (см. [7]).

Лемма 4. *Пусть G — свободное произведение конечного числа конечных p-групп $P_1, \dots, P_n$ и некоторой свободной группы S. Тогда в G существует нормальная свободная подгруппа F конечного p-индекса.*

Доказательство. В качестве F можно взять ядро очевидного гомоморфизма группы G на прямое произведение групп $P_1, \dots, P_n$. Лемма доказана.

Пусть G — группа, H — ее нормальная подгруппа. Через $Aut_G(H)$ будем обозначать множество ограничений на подгруппу H всех внутренних автоморфизмов группы G. Иными словами, $Aut_G(H) = \{\widehat{x}|_H : x \in G\}$, где $\widehat{x}$ — внутренний автоморфизм группы G, действующий по правилу: $g\widehat{x} = x^{-1}gx$ для любого элемента g группы G.

Лемма 5. *Пусть φ — эпиморфизм группы G на группу F, $1 \leqslant H_0 \leqslant H \leqslant G$ — нормальный ряд группы G. И пусть $K_0 = H_0\varphi$, $K = H\varphi$, $\overline{G} = G/H_0$, $\overline{H} = H/H_0$, $\overline{F} = F/K_0$, $\overline{K} = K/K_0$. Если $Aut_{\overline{G}}(\overline{H}) = 1$, то $Aut_{\overline{F}}(\overline{K}) = 1$.*

Доказательство этого утверждения сводится к непосредственным вычислениям.

Лемма 6. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B. Если группы A и $Aut_G(A)$ являются конечными p-группами, а группа B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то группа G также $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть $\theta : B \to Aut_G(A)$ — сопровождающий гомоморфизм, т. е. отображение, сопоставляющее каждому элементу b из B ограничение на подгруппу A соответствующего ему внутреннего автоморфизма $\widehat{b}$ группы G. И пусть $H = Ker\theta$. Так как $Aut_G(A)$ — конечная p-группа, то H — нормальная подгруппа группы B конечного p-индекса. Кроме того, индекс подгруппы B в группе G равен порядку подгруппы A и, следовательно, является степенью числа p. Поэтому H — подгруппа конечного p-индекса группы G. Заметим, что подгруппа H $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, поскольку содержится в B, и нормальна в группе

G, поскольку поэлементно перестановочна с группой A и нормальна в группе B.

Таким образом, группа G является расширением $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы H с помощью конечной p-группы G/H. Отсюда следует, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема [8]. Лемма доказана.

Для произвольной группы A через A' будем обозначать коммутант группы A, а через A^n — степенную подгруппу группы A, где n — целое неотрицательное число.

Лемма 7. *Если A — конечная p-группа, то группа Γ_A всех автоморфизмов группы A, действующих тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$, является p-группой.*

Этот результат Ф. Холла хорошо известен (см., напр., [5, с. 562]).

Лемма 8. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B. И пусть A — конечная p-группа, а группа B $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Введем обозначения: $\overline{A} = A/A'A^p$, $\overline{G} = G/A'A^p$. Если $Aut_{\overline{G}}(\overline{A}) = 1$, то группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Так как $Aut_{\overline{G}}(\overline{A}) = 1$, то все автоморфизмы группы $Aut_G(A)$ действуют тождественно по модулю подгруппы $A'A^p$. Поэтому согласно лемме 7 $Aut_G(A)$ является p-группой. Применяя лемму 6, получаем, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Лемма доказана.

3. Доказательство основного результата

Пусть G — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Покажем, что G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для произвольного простого числа p.

Так как подгруппа H содержится в A, то она конечно порождена и нильпотентна. Поэтому H почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, т. е. в ней существует $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая подгруппа H_0 конечного индекса. Тогда по лемме 1 в группе H существует характеристическая подгруппа L_0 конечного индекса, содержащаяся в H_0. Заметим, что L_0, являясь подгруппой в H_0, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

По лемме 2 в группе H существует характеристическая подгруппа L, содержащая L_0 и такая, что индекс $[L : L_0]$ является степенью числа p, а индекс $[H : L]$ взаимно прост с p. Так как группа L является расширением $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы L_0 с помощью конечной p-группы, то она сама $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема [8]. Так как L характеристична в H и H нормальна в G, то L нормальна в G. Очевидно, что $G/L = (A/L * B/L, H/L)$ — свободное произведение групп A/L и B/L с объединенной подгруппой H/L. При этом сомножители A/L и B/L этого свободного произведения почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы как конечно порожденные нильпотентные группы, а объединенная подгруппа H/L конечна. Следовательно, группа G/L почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема [2], поэтому в ней существует нормальная $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая подгруппа U/L конечного индекса. Таким образом, в группе G получили нормальный ряд $1 \leqslant L \leqslant U \leqslant G$, где G/U — конечная группа, U/L — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа.

Теперь рассмотрим отображение $\psi : G \to AutL/L'L^p$, сопоставляющее каждому элементу x группы G ограничение на подгруппу $L/L'L^p$ внутреннего автоморфизма $\widehat{xL'L^p}$ группы $G/L'L^p$. Таким образом, для каждого элемента $aL'L^p$ из $L/L'L^p$

$$x\psi : aL'L^p \longmapsto (xL'L^p)^{-1} \cdot aL'L^p \cdot xL'L^p = (x^{-1}ax)L'L^p. \qquad (2)$$

Очевидно, что ψ — гомоморфизм. Обозначим через V ядро гомоморфизма ψ. Тогда из (2) следует, что для каждого элемента x из V и для каждого элемента a из L

$$aL'L^p = (xL'L^p)^{-1} \cdot aL'L^p \cdot xL'L^p. \qquad (3)$$

Заметим, что подгруппа L группы A конечно порождена, и поэтому фактор-группа $L/L'L^p$ конечна. Отсюда и из того, что фактор-группа G/V вложима в группу $AutL/L'L^p$, следует, что V — подгруппа конечного индекса группы G. Так как фактор-группа $L/L'L^p$ абелева, то $L \subseteq V$. Таким образом, в группе G получили нормальный ряд $1 \leqslant L \leqslant V \leqslant G$, где G/V — конечная группа, и для произвольных элементов $x \in V$ и $a \in L$ выполняется равенство (3).

Рассмотрим теперь подгруппу $W = U \cap V$. Очевидно, что W — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая L. Покажем, что группа W $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Для этого каждому неединичному элементу a из W сопоставим гомоморфизм группы W на некоторую конечную p-группу, образ a относительно которого отличен от единицы.

Рассмотрим сначала случай, когда $a \notin L$. Пусть $\varepsilon : W \to W/L$ — естественный гомоморфизм. Тогда образ aL элемента a относительно ε отличен от единицы. При этом группа W/L $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема как подгруппа $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы U/L. Поэтому существует гомоморфизм θ группы W/L на некоторую конечную p-группу, переводящий aL в элемент, отличный от единицы. Таким образом, гомоморфизм $\varepsilon\theta$ является искомым.

Пусть теперь $a \in L \setminus 1$. Так как группа L конечно порождена и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то по лемме 1 в ней существует характеристическая подгруппа R конечного p-индекса, не содержащая элемент a. Очевидно, что подгруппа R, как и L, нормальна в группе G. Очевидно также, что фактор-группа G/R является свободным произведением подгрупп A/R и B/R с объединенной подгруппой H/R. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\psi_1 : G \to G/R$ и введем следующие обозначения: $G\psi_1 = G/R = G_1$, $A\psi_1 = A/R = A_1$, $B\psi_1 = B/R = B_1$, $H\psi_1 = H/R = H_1$, $L\psi_1 = L/R = L_1$, $W\psi_1 = W/R = W_1$, $a\psi_1 = aR = a_1$. Тогда $G_1 = (A_1 * B_1, H_1)$. Заметим, что H_1 — конечная группа, $L_1 \subseteq H_1$ и $a_1 \neq 1$.

Так как H_1 — конечная нильпотентная группа, то она раскладывается в прямое произведение $H_1 = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_n$, где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — примарные компоненты группы H_1, соответствующие попарно различным простым числам $q_1, q_2, \ldots, q_n$ [3, п. 17.1.4]. Так как L_1 — p-подгруппа группы H_1 и $L_1 \neq 1$ (поскольку $a_1 \in L_1$ и $a_1 \neq 1$), то одна из примарных компонент Q_i является p-компонентой. Пусть для определенности Q_1 —

p-компонента. Тогда $L_1 \subseteq Q_1$. Поэтому индекс $[Q_1 : L_1]$ делит индекс $[H_1 : L_1] = [H : L]$ и, следовательно, взаимно прост с p. С другой стороны, индекс $[Q_1 : L_1]$ является степенью числа p, поскольку Q_1 — конечная p-группа. Из последних двух обстоятельств следует, что $[Q_1 : L_1] = 1$, т. е. $L_1 = Q_1$. Очевидно, что элемент a_1 не принадлежит подгруппе $Q = Q_2 \times \ldots \times Q_n$. Заметим, что Q является характеристической подгруппой группы H_1, т. к. все Q_i характеристичны в H_1. Следовательно, подгруппа Q, как и подгруппа H_1, нормальна в G_1. Факторизуя G_1 по Q, получим свободное произведение групп A_1/Q и B_1/Q с объединенной подгруппой H_1/Q.

Рассмотрим естественный гомоморфизм $\psi_2 : G_1 \to G_1/Q$ и введем следующие обозначения: $G_1\psi_2 = G_1/Q = G_2$, $A_1\psi_2 = A_1/Q = A_2$, $B_1\psi_2 = B_1/Q = B_2$, $H_1\psi_2 = H_1/Q = H_2$, $L_1\psi_2 = L_1Q/Q = L_2$, $W_1\psi_2 = W_1Q/Q = W_2$, $a_1\psi_2 = a_1Q = a_2$. Тогда $G_2 = (A_2 * B_2, H_2)$. Заметим, что $L_2 = L_1Q/Q = Q_1Q/Q = H_1/Q = H_2$ — конечная p-группа, изоморфная Q_1. Заметим еще, что $a_2 \neq 1$, поскольку $a_1 \notin Q$.

Так как A_2 — конечно порожденная нильпотентная группа и H_2 — ее конечная p-подгруппа, то в группе A_2 существует нормальная подгруппа M конечного p-индекса такая, что $M \cap H_2 = 1$. Аналогично в группе B_2 существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса такая, что $N \cap H_2 = 1$. Согласно лемме 3, можно рассмотреть свободное произведение G_3 групп A_2/M и B_2/N с объединенной подгруппой $H_3 = H_2M/M = H_2N/N$ и гомоморфизм $\psi_3 : G_2 \to G_3$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A_2 \to A_2/M$ и $B_2 \to B_2/N$. Введем следующие обозначения: $A_2\psi_3 = A_3$, $B_2\psi_3 = B_3$, $W_2\psi_3 = W_3$, $L_2\psi_3 = L_3 = H_3$, $a_2\psi_3 = a_3$. Тогда $G_3 = (A_3 * B_3, H_3)$, где A_3, B_3, H_3 — конечные p-группы. Заметим, что $a_3 \neq 1$, т. к. $a_3 = a_2M$ и при этом $a_2 \notin M$, поскольку $a_2 \in H_2 \setminus 1$ и $H_2 \cap M = 1$.

Рассмотрим естественный гомоморфизм $\psi_4 : G_3 \to G_3/H_3$. Вводя обозначения $G_3\psi_4 = G_3/H_3 = G_4$, $A_3\psi_4 = A_3/H_3 = A_4$, $B_3\psi_4 = B_3/H_3 = B_4$, получим свободное произведение $G_4 = A_4 * B_4$, где A_4 и B_4 — конечные p-группы. Так как $L \subseteq W$, то $L_3 \subseteq W_3$ и поскольку $L_3 = H_3$, то $H_3 \subseteq W_3$. Поэтому $W_3\psi_4 = W_3/H_3$. Обозначим подгруппу W_3/H_3 через W_4. Ее индекс в группе G_4 конечен, поскольку конечен индекс $[G : W]$. Отсюда и из того, что группа G_4 конечно порожденная, следует, что и ее подгруппа W_4 конечно порождена.

По теореме Куроша (см., напр., [4, с. 211] подгруппа W_4 группы G_4 раскладывается в свободное произведение вида

$$W_4 = S * P_1 * \ldots * P_k, \tag{4}$$

где S — свободная группа, а все $P_i\,(i = 1, \ldots, k)$ являются конечными p-группами вида $x^{-1}A_4x \cap W_4$ и $y^{-1}B_4y \cap W_4$, где $x, y \in G_4$. Конечность разложения (4) следует из конечной порожденности группы W_4. По лемме 4 в группе W_4 существует нормальная подгруппа F_4 конечного p-индекса, являющаяся свободной. Отсюда и из того, что $W_4 = W_3/H_3$, следует, что существует подгруппа $F_3 \in L(W_3, H_3)$ такая, что $F_4 = F_3/H_3$. Таким образом, группа F_3 является расширением группы H_3 с помощью свободной группы F_4. Такое расширение, очевидно, является расщепляемым. Заметим, что группа F_4 $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, поскольку она свободна.

Введем следующие обозначения: $\overline{L} = L/L'L^p$, $\overline{V} = V/L'L^p$, $\overline{W} = W/L'L^p$. Так как $W \subseteq V$, то $Aut_{\overline{W}}(\overline{L}) \leqslant Aut_{\overline{V}}(\overline{L})$. В силу (3) $Aut_{\overline{V}}(\overline{L}) = 1$. Из последних двух обстоятельств следует, что $Aut_{\overline{W}}(\overline{L}) = 1$. Введем еще ряд обозначений: $\overline{H}_3 = H_3/H_3'H_3^p$, $\overline{W}_3 = W_3/H_3'H_3^p$, $\overline{F}_3 = F_3/H_3'H_3^p$. Поскольку $F_3 \subseteq W_3$, имеем $Aut_{\overline{F}_3}(\overline{H}_3) \leqslant Aut_{\overline{W}_3}(\overline{H}_3)$. Так как $W\psi_1\psi_2\psi_3 = W_3$, $L\psi_1\psi_2\psi_3 = L_3 = H_3$, $L'L^p\psi_1\psi_2\psi_3 = L_3'L_3^p = H_3'H_3^p$, то из того, что $Aut_{\overline{W}}(\overline{L}) = 1$, в силу леммы 5 следует, что $Aut_{\overline{W}_3}(\overline{H}_3) = 1$ и, следовательно, $Aut_{\overline{F}_3}(\overline{H}_3) = 1$.

Мы видим, таким образом, что группа F_3 является расщепляемым расширением конечной p-группы H_3 с помощью $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группы и при этом $Aut_{\overline{F}_3}(\overline{H}_3) = 1$. Поэтому в силу леммы 8 группа F_3 является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. С другой стороны, F_3 — нормальная подгруппа в W_3 и $W_3/F_3 \cong W_4/F_4$ — конечная p-группа. Из последних двух обстоятельств следует, что группа W_3 $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что $a_3 \in W_3 \setminus 1$, следует, что существует гомоморфизм ψ_5 группы W_3 на некоторую конечную p-группу W_5, образ элемента a_3 относительно которого отличен от единицы. Тогда гомоморфизм $\psi_1|_W \cdot \psi_2|_{W_1} \cdot \psi_3|_{W_2} \cdot \psi_5$ группы W на конечную p-группу W_5 отображает элемент a в элемент $a_3\psi_5$, отличный от единицы, и является искомым. Теорема доказана.

Автор благодарен Д. Н. Азарову за помощь при написании данной статьи.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сб. Тула, 2010. Т. 11, вып. 3 (35). С. 11—21.
2. *Азаров Д. Н., Гольцов Д. В.* Почти аппроксимируемость конечными p-группами свободного произведения двух групп с конечными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 94—97.
3. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М. : Наука, 1977. 240 с.
4. *Курош А. Г.* Теория групп. М. : Наука, 1967. 648 с.
5. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. М. : Наука, 1966. 603 с.
6. *Шмелькин А. Л.* Полициклические группы // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. С. 234—235.
7. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalised free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193—209.
8. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.