3. *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных свободных произведений двух групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 115—123.
4. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп // Математика и ее приложения : журн. Иван. мат. о-ва. 2011. С. 101—104.
5. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика : период. сб. переводов иностр. ст. 1968. Т. 12, № 1. С. 3—36.
6. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193—209.
7. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.
8. *Neumann B. H.* An essay on free products of groups with amalgamation // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1954. Vol. 246. P. 503—554.

УДК. 517.946

Л. Н. Кусковский

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ПУАНКАРЕ

Для дифференциальной системы с непрерывно дифференцируемыми комплексными искомыми и заданными функциями в конечной односвязной области плоскости, обобщающей известную систему Коши — Римана, ставится и решается краевая задача Пуанкаре. Получены условия нётеровости и формула индекса задачи.

Ключевые слова: условие Гёльдера, задача Пуанкаре, нётеровость задачи, индекс задачи.

The Poincare boundary value problem is formulated and solved for the differential system with complex, continuously differentiable data and desired functions on a finite, simply connected region of the plane (generalization of the Cauchy — Riemann system). The index problem formula and the Noether conditions are obtained.

Key words: Poincare problem, index problem, Noether condition for a problem, Holder condition.

§ 1. Предварительные сведения

В этом параграфе мы изложим основные понятия и обозначения, которые будут использоваться в работе:

G — конечная односвязная область плоскости $z = x + iy$, $i^2 = -1$;

∂G — замкнутая гладкая положительно ориентированная граница G;

$C^k(G)$ $\left(C^k(\partial G)\right)$ — пространство комплекснозначных функций, имеющих в G (на ∂G) непрерывные частные производные до порядка k включительно, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

$C_\nu^k(G)$ $\left(C_\nu^k(\partial G)\right)$ — пространство функций $f \in C^k(G)$ $\left(f \in C^k(\partial G)\right)$, удовлетворяющих в G (на ∂G) условию Гёльдера с показателем $0 < \nu \le 1$;

$\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$, $t \in \partial G$ — норма в пространстве $f \in C^0(\partial G)$;

$\|f\|_\nu = \|f\|_C + \sup\limits_{t_1, t_2} \dfrac{|f(t_2) - f(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\nu}$, $\forall t, t_1, t_2 \in \partial G$ — норма в пространстве функций $f \in C_\nu^0(\partial G)$.

Известно, что относительно введенных норм пространства $C^0(\partial G)$ и $C_\nu^0(\partial G)$ являются полными линейными нормированными пространствами, т. е. пространствами Банаха.

§ 2. Краевая задача типа Пуанкаре

В статье [2] для системы дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
\partial U/\partial x - \partial V/\partial y &= a_{11}U - ia_{12}V, \\
\partial U/\partial y + \partial V/\partial x &= ia_{12}U + a_{11}V
\end{aligned}
\tag{1}
$$

с комплекснозначными искомыми $U, V \in C^2(G)$ и данными $a_{11}, a_{12} \in C^1(\overline{G})$ функциями была получена формула

$$
\omega(z) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\Phi(z, \bar{z}) + \iint\limits_G R(z, \varsigma, \bar{z}, \bar{\varsigma})\Phi(\varsigma, \bar{\varsigma})d\xi d\eta\right\},
\tag{2}
$$

где $z = x + iy$, $\varsigma = \xi + i\eta \in G$, $i^2 = -1$, $u(x,y) = U(x,y)$, $v(x,y) = -iV(x,y)$,
$\omega(z) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$, $\Phi(z,\bar{z}) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\bar{z}) \\ \Phi_2(z) \end{pmatrix}$, $R(z,\varsigma,\bar{z},\bar{\varsigma}) = \begin{pmatrix} R_1(\bar{\varsigma},\bar{z}) & R_2(\varsigma,z) \\ R_1(\bar{\varsigma},\bar{z}) & -R_2(\varsigma,z) \end{pmatrix}$,
$R_1, R_2 \in C^1(\overline{G} \times \overline{G})$ — резольвенты интегральных уравнений ([2], формулы (4.3), (4.4)) интегрального представления всех решений системы (1) через произвольные функции $\Phi_1(\bar{z})$, $\Phi_2(z)$, голоморфные относительно своих аргументов в G.

Для системы (1) поставим задачу Пуанкаре: *найти в области G решение $\omega(z)$ системы (1), принадлежащее пространству $C_\nu^1(\overline{G})$, по краевому условию*

$$
\operatorname{Re}\left[p^1\omega_x + p^2\omega_y + q\omega\right] = \Upsilon(x,y), \ (x,y) \in \partial G,
\tag{3}
$$

где p^1, p^2 и q — заданные на ∂G комплексные матрицы второго порядка, принадлежащие пространству $C_\nu^0(\partial G)$, т. е. все элементы матриц являются функциями $C_\nu^0(\partial G)$, *а* $\Upsilon = (\Upsilon_1, \Upsilon_2)$ — *заданный на ∂G вещественный вектор пространства $C_\nu^0(\partial G)$.*

Здесь (и в дальнейшем) $\omega_x \equiv \partial\omega / \partial x$, $\omega_y \equiv \partial\omega / \partial y$.

Далее, полагая $t = x + iy \in \partial G$, получим краевое условие, эквивалентное условию (3):

$$\mathrm{Re}\left[H_1(t)\omega_t + H_2(t)\omega_{\bar{t}} + q(t)\omega\right] = \Upsilon(t), \;\; t \in \partial G, \tag{4}$$

где $H_1(t) = p^1(t) + ip^2(t)$, $H_2(t) = p^1(t) - ip^2(t)$. (5)

Так как матрицы p^1 и p^2 — комплексные, то $H_1(t)$ и $H_2(t)$ не являются сопряженными друг к другу. (Комплексное сопряжение всюду будем обозначать чертой сверху над символом.)

Известно [5, § 69], что для всяких голоморфных в G функций $\Phi_1(\bar{z})$, $\Phi_2(z)$ (2) существует единственная вещественная функция $\mu_k(t) \in C_\nu^0(\partial G)$, $k = 1, 2$, для которой справедливо представление, полученное И. Н. Векуа, т. е.

$$\Phi_k(z) = \int\limits_{\partial G} \log e\left(1 - \frac{z}{t}\right)\mu_k(t)ds_t, \;\; z \in G, \;\; k = 1,2. \tag{6}$$

Здесь, без ограничения общности, считаем, что $0 \in G$, $\mathrm{Im}\,\Phi_1(0) = 0$, $\mathrm{Im}\,\Phi_2(0) = 0$. Под $\log e\left(1 - \dfrac{z}{t}\right)$ при данном $t \in \partial G$ понимается однозначная в G ветвь этой функции, обращающаяся в единицу при $z = 0$.

Теперь, возвращаясь к формуле (2), потребуем, чтобы представленное этой формулой решение $\omega(z) \in C_\nu^1(G)$ системы (1) удовлетворяло условию (4). В этом случае, если подставить выражение (6) в интегральное уравнение (2) и перейти к пределу при $z \to t_0 \in \partial G$ изнутри области G, сформулированная задача (1), (4) приводится (для определения вектора $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t))$) к сингулярному интегральному уравнению вида

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\Bigg[& \pi i\left(\widetilde{H}_1(t_0)\bar{t}_0' + \widetilde{H}_2(t_0)t_0'\right)\mu(t_0) + \widetilde{H}_1(t_0)\int\limits_{\partial G}\frac{\mu(t)}{t - t_0}ds_t + \\ & + \widetilde{H}_2(t_0)\int\limits_{\partial G}\frac{\mu(t)}{\bar{t} - \bar{t}_0}ds_t + \int\limits_{\partial G}\widetilde{Q}(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t})\mu(t)ds_t \Bigg] = \Upsilon(t_0), \end{aligned} \tag{7}$$

где $t = t(s) = x(s) + iy(s)$; s — длина дуги (дуговая абсцисса), отсчитываемая от некоторой точки на ∂G по направлению положительной ориентации ∂G; $t' = dt / ds = dx / ds + idy / ds$;

$$\widetilde{H}_1(t_0) = H_1(t_0)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; \widetilde{H}_2(t_0) = H_2(t_0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\widetilde{Q}(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}) = \left(Q_{t_0} + Q_{\bar{t}_0} + \widetilde{q}(t_0)P + Q\right)(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}), \tag{9}$$

где $Q_{t_0} = H_1(t_0)\iint\limits_G R_{t_0}(t_0, \varsigma, \bar{t}_0, \bar{\varsigma}) P(t, \bar{t}, \varsigma, \bar{\varsigma}) d\xi d\eta;$

$Q_{\bar{t}_0} = H_2(t_0)\iint\limits_G R_{\bar{t}_0}(t_0, \varsigma, \bar{t}_0, \bar{\varsigma}) P(t, \bar{t}, \varsigma, \bar{\varsigma}) d\xi d\eta;$

$Q = q(t_0)\iint\limits_G R(t_0, \varsigma, \bar{t}_0, \bar{\varsigma}) P(t, \bar{t}, \varsigma, \bar{\varsigma}) d\xi d\eta;$

$$\tilde{q}(t_0) = q(t_0)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P(t, \bar{t}, \varsigma, \bar{\varsigma}) = \begin{pmatrix} -\log e\left(1 - \dfrac{\bar{\varsigma}}{\bar{t}}\right) & 0 \\ 0 & \log e\left(1 - \dfrac{\varsigma}{t}\right) \end{pmatrix}, \quad \varsigma \in G,$$

$\varsigma = \xi + i\eta,\ H_1(t_0),\ H_2(t_0)$ имеют вид (5).

Сингулярные интегралы определяются в смысле главного значения по Коши.

В силу тождества

$$\frac{ds}{\bar{t} - \bar{t}_0} = \frac{t' dt}{t - t_0} + t' d \log \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}$$

уравнение (7) запишется в виде

$$\operatorname{Re}\left[\pi i H(t_0)\mu(t_0) + \int\limits_{\partial G} \frac{H(t)\mu(t)}{t - t_0} dt + \right. \\ \left. + \int\limits_{\partial G} \left(H_3(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}) t' + \tilde{Q}(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}) \bar{t}' \right) \mu(t) dt \right] = \Upsilon(t_0), \tag{10}$$

где $H(t) = \tilde{H}_1(t_0)\bar{t}' + \tilde{H}_2(t_0) t',$ (11)

$$H_3(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}) = \tilde{H}_2(t_0) \frac{d \log \dfrac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}}{dt}, \tag{12}$$

$\tilde{H}_k(t_0),\ k = 1{,}2$ и $\tilde{Q}(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t})$ определяются по (8) и (9).

В обозначениях

$$\alpha^*(t_0) = \operatorname{Re}\left[\pi i H(t_0)\right], \quad \beta^*(t_0) = K(t_0, t_0) = \operatorname{Im} i H(t_0), \tag{13}$$

$$K(t_0, t) = (t - t_0)\operatorname{Re}\left[\frac{H(t)}{t - t_0} + H_3(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}) t' + \tilde{Q}(t_0, t, \bar{t}_0, \bar{t}) \bar{t}'\right], \tag{14}$$

$$K^*(t_0, t) = \frac{K(t_0, t) - K(t_0, t_0)}{t - t_0} \tag{15}$$

уравнение (10) примет вид:

$$T\mu \equiv \alpha^*(t_0)\mu(t_0) + \beta^*(t_0)\int\limits_{\partial G} \frac{\mu(t)}{t - t_0} dt + \int\limits_{\partial G} K^*(t_0, t)\mu(t) dt = \Upsilon(t_0). \tag{16}$$

Для дальнейшего необходимо определение.

Определение [3, с. 177]. Пусть X и Y — банаховы пространства. Оператор $A:X\to Y$ называется *компактным* (или вполне непрерывным), если он переводит ограниченные множества из X в компактные множества в Y.

Это определение эквивалентно следующему: линейный оператор $A:X\to Y$ *компактен* тогда и только тогда, когда для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}\subset X$ последовательность образов $\{Ax_n\}$ имеет подпоследовательность, сходящуюся в Y.

Рассмотрим оператор K_*, определяемый ядром $K^*(t_0,t)$ в (16), т. е.

$$K_*\mu=(K_*\mu)(t_0)=\int\limits_{\partial G}K^*(t_0,t)\mu(t)dt. \tag{17}$$

Теорема 1. Оператор K_* (17), действующий в пространстве $C_\nu^0(\partial G)$, — компактный.

Доказательство. Все рассматриваемые в работе функции относительно введенных в § 1 норм образуют банаховы пространства. В силу принятых предположений о гладкости данных задачи и контура ∂G из формул (5), (8), (9) и (11)—(15) следует, что при $t\neq t_0$ $K^*(t_0,t)\in C_\nu^0(\partial G)$. Если будет установлено, что множество функций $(K_*\mu)(t)\in C_\nu^0$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то из критерия компактности Арцела [3, с. 71] будет следовать компактность оператора K_* (17). Подробное доказательство этого имеется в [5, с. 173] и [4, с. 19—20].

Сингулярно интегральное уравнение (16) полностью изучено Н. П. Векуа [1].

Пусть комплексные матрицы p^1 и p^2 из (3) имеют вид

$$p^1(t)=\begin{pmatrix}\overset{1}{p}_{11} & \overset{1}{p}_{12}\\ \overset{1}{p}_{21} & \overset{1}{p}_{22}\end{pmatrix},\quad p^2(t)=\begin{pmatrix}\overset{2}{p}_{11} & \overset{2}{p}_{12}\\ \overset{2}{p}_{21} & \overset{2}{p}_{22}\end{pmatrix}.$$

Теорема 2. Если

$$\det p^1+\det p^2+i\left[\left(\overset{2}{p}_{11}\overset{1}{p}_{21}-\overset{1}{p}_{11}\overset{2}{p}_{21}\right)+\left(\overset{1}{p}_{12}\overset{2}{p}_{22}-\overset{2}{p}_{12}\overset{1}{p}_{22}\right)\right]\neq 0,\ \forall t\in\partial G, \tag{18}$$

то задача (1), (3) нётерова и ее индекс

$$\chi=2n, \tag{19}$$

где $n=\dfrac{1}{2\pi}\Delta\big|_{\partial G}\arg\det\overline{H(t)}$ ($H(t)$ определяется по (11)).

Доказательство. Согласно (13) имеем

$$\alpha^*(t)+i\pi\beta^*(t)=\pi iH(t). \tag{20}$$

Отсюда и [1]

$$\det H(t)\neq 0,\ \ \forall t\in\partial G \tag{21}$$

является необходимым и достаточным условием для нётеровости оператора T (16). В силу (11), (8) и (5) условие (21) равносильно условию (18).

Далее, имея [1] для индекса χ оператора T формулу

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \Delta\big|_{\partial G} \arg \frac{\det\left(\alpha^*(t) - i\pi\beta^*(t)\right)}{\det\left(\alpha^*(t) + i\pi\beta^*(t)\right)}$$

из (20) и (21), получаем (19). Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. 2-е изд. М. : Наука, 1970. 380 с.
2. *Кусковский Л. Н.* О краевой задаче типа Римана — Гильберта // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, № 3. С. 523—532.
3. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. М. : Высш. шк., 1982. 271 с.
4. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М. : Высш. шк., 1977. 431 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М. : Наука, 1968. 512 с.

УДК 513.64

С. И. Хашин, Ю. А. Хашина

СВОЙСТВА ЧИСЕЛ, ПСЕВДОПРОСТЫХ ПО ФРОБЕНИУСУ

Не существует чисел, меньших 2^{60}, псевдопростых по Фробениусу (FPP). Есть гипотеза, что их не существует вообще. Если эта гипотеза верна или хотя бы их нижняя граница будет существенно поднята, это позволит намного облегчить проверку чисел на простоту.

В работе доказываются некоторые свойства FPP-чисел.

Ключевые слова: псевдопростые числа, алгоритм Фробениуса.

There are no Frobenius pseudoprime numbers (FPP) less than 2^{60}. There is a hypothesis that they do not exist at all. If this hypothesis is true, or, at least, the lower bound will be substantially increased, this will make it much easier to check for prime numbers.

In the paper we prove some properties of the FPP numbers.

Key words: pseudoprime numbers, Frobenius algorithm.

1. Введение

Наиболее мощный среди элементарных вероятностных методов проверки чисел на простоту — тест Фробениуса [1—5].