УДК 517.11

Б. Я. Солон

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И СВОДИМОСТИ МНОЖЕСТВ

В статье предлагается определить сводимости множеств с помощью различных классов функциональных частично вычислимых операторов в смысле Роджерса. Доказано, что при этом появляются как хорошо известные алгоритмические сводимости множеств, так и новые.

Ключевые слова: оператор перечисления, частично вычислимый оператор, сводимость по перечислимости, Тьюрингова сводимость.

The paper proposes to determine the reducibility of sets using different classes of functional partial computable operators in the sense of Rogers. It is proved that in this case appear as a well-known algorithmic reducibility of sets and new.

Key words: enumeration operator, partial computable operator, enumeration reducibility, Turing reducibility.

Введем обозначения: $\omega = \{0,1,2,\dots\}$ – множество натуральных чисел, $\langle x, y\rangle$ – канторовский номер пары (x, y), если $z = \langle x, y\rangle$, то $\langle z\rangle_1 = x$ и $\langle z\rangle_2 = y$, $\langle A\rangle_1 = \{x: \exists y[\langle x, y\rangle \in A]\}$ и $\langle A\rangle_2 = \{y: \exists x[\langle x, y\rangle \in A]\}$. Пусть 2^ω – множество подмножеств ω, элементы 2^ω называются *множествами*. Множества будем обозначать большими латинскими буквами *A, B, C,..., X*.

Пусть PF – множество одноместных частичных арифметических функций $\alpha: \omega \to \omega$, $dom\alpha, ran\alpha, graph\alpha = \{\langle x, \alpha(x)\rangle: x \in dom\alpha\}$ – область определения, множество значений, график функции α, соответственно. Запись $\alpha(x)\downarrow$, что $x \in dom\alpha$, и $\alpha(x)\uparrow$, что $x \notin dom\alpha$. Функция α называется *тотальной*, если $dom\alpha = \omega$. Буквы f, g, p будем использовать только для обозначения *тотальных функций*. Множество тотальных функций обозначим через TF.

Будем придерживаться системы обозначений, принятых в монографии [2]. В частности, W_z – вычислимо перечислимое множество с гёделевым номером z, φ_z – частично вычислимая функция с гёделевым номером z. Множество A называется *однозначным*, если $A = graph\alpha$ для некоторой функции $\alpha \in PF$. Введем обозначения: SV – множество однозначных множеств, $\tau: PF \to SV: \tau(\alpha) = graph\alpha$, $\tau^{-1}: SV \to PF: \tau^{-1}(A) = \alpha$, где $A = graph\alpha$. С целью полноты изложения приведем ряд основных определений из монографии [2] с некоторыми терминологическими изменениями.

Определение 1. Любое всюду определенное однозначное отображение $\Phi: 2^\omega \to 2^\omega$ называется *оператором*. Любое всюду определенное однозначное отображение $\Psi: PF \to PF$ называется *функциональным оператором*.

Всякий функциональный оператор Ψ определяет отображение $\Gamma = \tau\Psi\tau^{-1}: SV \to SV$ и наоборот, каждое отображение $\Gamma: SV \to SV$ определяет функциональный оператор $\Psi = \tau^{-1}\Gamma\tau: PF \to PF$. Пусть Γ_Φ – ограничение оператора Φ на те однозначные множества A, для которых $\Phi(A)$ – также однозначное множество, тогда $\Gamma_\Phi: SV \to SV: \Gamma_\Phi(A) = \Phi(A)$ – *частичное* отображение и $\Psi = \tau^{-1}\Gamma_{\Phi}\tau: PF \to PF$ – *частичный* функциональный оператор. В этом случае говорят, что Ψ *определяется оператором* Φ.

Определение 2. Оператор $\Phi_z(X) = \{x: \exists u[\langle x, u\rangle \in W_z \wedge D_u \subseteq X]\}$ называется *е-оператором с гёделевым номером* z.

Очевидно, что любой е-оператор Φ обладает свойствами:

(i) *Монотонности*: $A \subseteq B \Rightarrow \Phi(A) \subseteq \Phi(B)$

(ii) *Непрерывности*: $\forall x[x \in \Phi(A) \Rightarrow \exists D[|D| < \infty \,\&D \subseteq A \wedge x \in \Phi(D)]]$

Определение 3. Функциональный оператор Ψ называется *частично вычислимым* (ч.в.) [в терминологии Роджерса – *частично рекурсивным*], если он определяется некоторым е-оператором Φ_z. Обозначим через Ψ_z ч.в. оператор, определяемый е-оператором Φ_z.

Определение 4. Частично вычислимый оператор Ψ называется *вычислимым* (в.) [в терминологии Роджерса – *рекурсивным*], если он определяется таким е-оператором Φ_z, что функциональный оператор $\Psi: PF \to PF$ является всюду определенным. Другими словами, функциональный оператор $\Psi: PF \to PF$ вычислим, если существует $z \in \omega$, для которого $\Psi(\alpha) = \tau^{-1}\Gamma_{\Phi_z}\tau(\alpha) \in PF$ для всех $\alpha \in PF$.

Определение 5. Частично вычислимый оператор Ψ называется *общевычислимым* (о.в.) [в терминологии Роджерса – *общерекурсивным*], если $TF \subseteq dom\Psi$ и $\Psi(TF) \subseteq TF$. Другими словами, ч.в. оператор Ψ является о.в., если он определен на всех тотальных функциях и $\Psi(f) \in TF$ для всех $f \in TF$.

Введем обозначения: $E = \{\Phi_z: z \in \omega\}$ – множество всех е-операторов; $PC_e = \{\Psi_z: z \in \omega\}$ – множество всех ч.в. операторов; C_e – множество всех в. операторов; GC_e – множество всех о.в. операторов. Заметим, что все три множества функциональных операторов содержат тождественный оператор I и замкнуты относительно операции композиции $*$.

Основная теорема об операторах [2, Теорема 9-XXIII] показывает, что если функциональные операторы рассматривать как отображения из *TF* в *PF*, то всякий ч.в. оператор может быть продолжен до в. оператора. Более того, такое продолжение может быть осуществлено равномерно, следовательно, существует эффективный пересчет всех в. операторов, определенных на *TF*.

Приведем точную формулировку основной теоремы об операторах.

Теорема 1. Существует тотальная вычислимая функция σ, такая, что для любого $z \in \omega$, если е-оператор Φ_z определяет частично вычислимый оператор Ψ, то $\Phi_{\sigma(z)}$ определяет вычислимый оператор Ψ', такой, что

$$\forall f[f \in dom\Psi' \cap TF \Rightarrow \Psi'(f) = \Psi(f)]$$

Пусть $B \subseteq PC_e$ – произвольное множество ч.в. операторов, содержащее I и замкнутое относительно операции композиции $*$. Следуя Розинасу [1], назовем любое такое множество B *функциональной базой.* С каждой функциональной базой можно связать *сводимость* на множестве PF и *сводимости* на множестве 2^{ω}, причем возникают сводимости как *по разрешимости* (т.е. сводимости, из которых следует $\leq_T$) и сводимости *по перечислимости* (т.е. сводимости, из которых следует $\leq_e$).

Приведем некоторые определения сводимостей на множестве PF с использованием функциональных баз. Для любых $\alpha, \beta \in PF$ будем считать по определению $\alpha \leq_b \beta \Leftrightarrow (\exists\Psi \in B)[\alpha = \Psi(\beta)]$. В частности, если $B = PC_e$, то возникает известная сводимость $\leq_e$ [4], если $B = C_e$, то возникает сводимость $\leq_{ce}$ [9], если $B = GC_e$, то возникает малоизученная сводимость $\leq_{gce}$. Другими словами, имеем следующие сводимости на PF:

$$\alpha \leq_e \beta \Leftrightarrow (\exists\Psi \in PC_e)[\alpha = \Psi(\beta)];$$
$$\alpha \leq_{ce} \beta \Leftrightarrow (\exists\Psi \in C_e)[\alpha = \Psi(\beta)];$$
$$\alpha \leq_{gce} \beta \Leftrightarrow (\exists\Psi \in GC_e)[\alpha = \Psi(\beta)].$$

Дополнительно к классическим базам, полезно ввести функциональную базу M, которая не рассматривается в монографии Х. Роджерса [2], но имеет важное приложение в контексте данной статьи.

Следуя Л. Сассо [9], скажем, что частичная функция α получена из функции β с помощью частично вычислимого оператора Ψ из множества M, если α получена из β и начальных функций $s(x) = x + 1$; $I_n^k(x_1, \dots, x_n) = x_k$; $o(x) = 0$ с помощью конечного числа применений операций подстановки, примитивной рекурсии и минимизации. Функциональные операторы из множества M будем называть *μ-операторами.*

Определение 7. $\alpha \leq_\mu \beta \Leftrightarrow (\exists\Psi \in M)[\alpha = \Psi(\beta)]$

Теперь определим сводимости на 2^ω с помощью рассмотренных выше функциональных баз. Напомним, что

$c_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A \\ 0, \text{если } x \notin A \end{cases}$ – *характеристическая функция* множества A и

$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \in A \\ \uparrow, \text{если } x \notin A \end{cases}$ – *частичная характеристическая функция* A.

Определение 8. Для любых множеств A и B

$$A \leq_{\hat{e}} B \Leftrightarrow c_A \leq_e c_B$$
$$A \leq_{\widehat{ce}} B \Leftrightarrow c_A \leq_{ce} c_B$$
$$A \leq_{\widehat{gce}} B \Leftrightarrow c_A \leq_{gce} c_B$$
$$A \leq_{\hat{\mu}} B \Leftrightarrow c_A \leq_\mu c_B$$

Определение 9. Для любых множеств A и B

$$A \leq_{\check{e}} B \Leftrightarrow \chi_A \leq_e \chi_B$$
$$A \leq_{\widecheck{ce}} B \Leftrightarrow \chi_A \leq_{ce} \chi_B$$
$$A \leq_{\widecheck{gce}} B \Leftrightarrow \chi_A \leq_{gce} \chi_B$$
$$A \leq_{\check{\mu}} B \Leftrightarrow \chi_A \leq_\mu \chi_B$$

Теорема 2. Для любых множеств A и B

$$A \leq_{\hat{e}} B \Leftrightarrow A \leq_{\widehat{ce}} B \Leftrightarrow A \leq_T B$$

Доказательство. В монографии Х. Роджерса доказано [2, Теорема 9-XXV], что $A \leq_T B \Leftrightarrow c_A \leq_{ce} c_B$, следовательно, $A \leq_{\widehat{ce}} B \Leftrightarrow A \leq_T B$. Для доказательства второй эквиваленции потребуется

Лемма 1. $(\forall\alpha \in PF)(\forall f \in TF)[\alpha \leq_e f \Leftrightarrow \alpha \leq_{ce} f]$

Завершим доказательство теоремы 2. Из леммы 1 следует, что $c_A \leq_e c_B \Leftrightarrow c_A \leq_{ce} c_B$, следовательно, $A \leq_{\hat{e}} B \Leftrightarrow c_A \leq_e c_B \Leftrightarrow c_A \leq_{ce} c_B \Leftrightarrow A \leq_T B$ и теорема доказана.

Для формулировки следующей теоремы используется, так называемая, табличную сводимость множеств. Определение сводимости $\leq_{tt}$ можно найти в [2, с.146].

Теорема 3. Для любых множеств A и B

$$A \leq_{\widehat{gce}} B \Leftrightarrow A \leq_{tt} B$$

Доказательство. В монографии [2] доказан результат Нероуда [8], утверждающий что $A \leq_{tt} B \Leftrightarrow c_A \leq_{gce} c_B$. Так как по определению $A \leq_{\widehat{gce}} B \Leftrightarrow c_A \leq_{gce} c_B$, то получаем требуемую эквиваленцию.

Теорема 4. Для любых множеств A и B

$$A \leq_{\hat{\mu}} B \Leftrightarrow A \leq_T B$$

Доказательство. Нам понадобится

Лемма 2. $(\forall \alpha \in PF)(\forall f \in TF)\left[\alpha \leq_\mu f \Leftrightarrow \alpha \leq_e f\right]$

Завершим доказательство теоремы. По определению, $A \leq_{\hat{\mu}} B \Leftrightarrow c_A \leq_\mu c_B$. В силу леммы 2 и тотальности функции $f = c_B$, $c_A \leq_\mu c_B \Leftrightarrow c_A \leq_e c_B$. Наконец, в силу теоремы 2, $c_A \leq_e c_B \Leftrightarrow A \leq_T B$. Итак, $A \leq_{\hat{\mu}} B \Leftrightarrow A \leq_T B$ и теорема доказана.

Из теорем 2 – 4 следует, что использование функциональных операторов для введения сводимостей множеств с помощью определения 8 не дает новых сводимостей. Тем не менее, как показывает следующая теорема, используемые для этого функциональные базы различны.

Теорема 5. (i) $GC_e \subset C_e \subset PC_e$;

(ii) $M \subset C_e$;

(iii) $GC_e \nsubseteq M \wedge M \nsubseteq GC_e$.

Доказательство. Пункт **(i)** доказан, по существу, в монографии [2]. Нестрогое второе включение очевидно. Докажем, что $PC_e \nsubseteq C_e$. Определим отображение

$$\mathrm{H}: 2^\omega \to 2^\omega: \begin{cases} \mathrm{H}(\{\langle 0,0\rangle\}) = \{\langle 0,0\rangle\} \\ \mathrm{H}(\{\langle 1,0\rangle\}) = \{\langle 0,1\rangle\} \\ \mathrm{H}(X) = X \text{ для остальных } X \subseteq \omega \end{cases}$$

Пусть $\Psi = \tau^{-1}\Gamma_{\mathrm{H}}\tau$, где Γ_{H} – ограничение Н на те однозначные множества A, для которых Н(A) – однозначное множество. Существует z_0 такое, что $\mathrm{H} = \Phi_{z_0}$, поэтому Ψ – частично вычислимый оператор. Ψ не является вычислимым оператором, так как $\Psi(o)$ не определено, где $o(x) = 0$ для всех $x \in \omega$. Таким образом, $C_e \subset PC_e$

То, что $GC_e \subseteq C_e$**,** доказано в [2, с.195]. Наконец, докажем, что $C_e \nsubseteq GC_e$. Из теоремы 2 следует, что $A \leq_T B \Leftrightarrow (\exists \Psi \in C_e)[\Psi(c_B) = c_A]$. Теорема Нероуда утверждает, что $A \leq_{tt} B \Leftrightarrow (\exists \Psi \in GC_e)[\Psi(c_B) = c_A]$. Так как существуют множества A и B, такие, что $A \leq_T B$ и $A \nleq_{tt} B$, то существует вычислимый, не общевычислимый оператор Ψ. Более того, из приведенных рассуждений следует, что существуют функции $f, g \in TF$, такие, что $f = \Psi(g)$ для некоторого $\Psi \in C_e$ и $f \neq \Psi'(g)$ для вех $\Psi' \in GC_e$.

(ii). Из определения Сассо следует, что любой функциональный оператор, принадлежащий множеству M, является вычислимым, т.е. $M \subseteq C_e$. Чтобы доказать $C_e \nsubseteq M$, потребуется следующая

Лемма 3 [5]**.** $\chi_A \leq_\mu \chi_B \Leftrightarrow A \leq_{pc} B$ для любых множеств A и B.

В формулировке леммы 3 используется, так называемая, *частично конъюнктивная сводимость* множеств, введенная Д. Г. Скордевым в [5]. Так как эта сводимость используется во второй части статьи, то приведем ее определение. Просто *конъюнктивная* сводимость $\leq_c$ является частным случаем табличной сводимости, когда *tt*-условие имеет вид $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle, \varsigma(\alpha)\rangle$, где $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ – данная *n*-ка чисел, а булева функция α имеет вид $\alpha = x_1 \wedge \dots \wedge x_n$. Другими словами,

$$A \leq_c B \Leftrightarrow (\exists f - \text{вычислимая функция})(\forall x)\left[x \in A \Leftrightarrow D_{f(x)} \subseteq B\right].$$

Теперь можно определить *pc*-сводимость множеств:

$$A \leq_{pc} B \Leftrightarrow (\exists z)(\forall x)\left[x \in A \Leftrightarrow \varphi_z(x) \downarrow \wedge D_{\varphi_z(x)} \subseteq B\right].$$

Ясно, что $A \leq_{pc} B \Rightarrow A \leq_e B$ для любых множеств A и B, т.е. pc-сводимость множеств является сводимостью по перечислимости.

Как обычно, через $deg_{pc}(A) = \{X: A \leq_{pc} X \wedge X \leq_{pc} A\}$ обозначим *pc-степень* множества A и через $\boldsymbol{D}_{pc}$ – частично упорядоченное множество pc-степеней. Хорошо известно, что $\boldsymbol{D}_{pc}$ – верхняя полурешетка с наименьшим элементом $\mathbf{0} = \{W_z: z \in \omega\}$. Приведем один нетривиальный результат Л. Сассо [10], который будем использован нами ниже. Доказано, что $\boldsymbol{D}_{pc}$ имеет *минимальные степени*, т. е. существует pc-степень $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, такая, что для любой pc-степени $\boldsymbol{x}$, если $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}$, то $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x}$ или $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Изучению pc-сводимости посвящена статья автора [6].

Завершим доказательство пункта **(ii)** нашей теоремы. Для этого достаточно привести пример вычислимого оператора $\Psi \in C_e$, не являющегося μ-оператором, т. е. такого, что $\Psi \notin M$. Другими словами, достаточно построить две частичные функции α и β, такие, что $\alpha \leq_{ce} \beta$ и $\alpha \nleq_{\mu} \beta$.

Как было отмечено выше, $\boldsymbol{D}_{pc}$ имеет минимальные pc-степени. Пусть $\boldsymbol{b} = deg_{pc}(B)$ – какая-либо минимальная степень. Докажем, что в этом случае $\beta = \chi_B$ обладает свойством: $(\forall \alpha \in PC)[\alpha \leq_{\mu} \beta \Rightarrow \beta \leq_{\mu} \alpha \vee \alpha -$ *ч.в. функция*. По существу, это свойство функции β означает, что частично упорядоченное множество $\boldsymbol{L}_{\mu}$ μ-степеней обладает минимальными элементами. В частности, $deg_{\mu}(\chi_B)$ – одна из минимальных μ-степеней.

Предположим, что $\beta = \chi_B$ не обладает указанным свойством, т. е. существует функция γ, которая не является частично вычислимой и $\gamma <_{\mu} \beta$. Определим функцию

$$\alpha(\langle x, y \rangle) = \begin{cases} 1, \text{если } \gamma(x) \downarrow \wedge\, y = \gamma(x) \\ 0, \text{если } \gamma(x) \downarrow \wedge\, y \neq \gamma(x) \end{cases}$$

Технически нетрудно с помощью вычислительных устройств с оракулами для функций убедиться, что $\alpha \equiv_{\mu} \gamma$. Рассмотрим $deg_{ce}(\beta)$. Из одного результата Л. Гаттериджа [7] следует, что $\boldsymbol{L}_{ce}$ не имеет минимальных элементов. Следовательно, существует частичная не вычислимая функция α, такая, что $\alpha <_{ce} \beta$, т. е. для некоторого вычислимого оператора $\Psi \in C_e$ имеем $\alpha = \Psi(\beta)$. В то же время имеем $\alpha \nleq_{\mu} \beta$, т. е. Ψ не является μ-оператором. Итак, доказано, что $C_e \nsubseteq M$.

(iii). Докажем сначала, что $M \nsubseteq GC_e$. Пусть Ψ – любой μ-оператор, такой, что если $\alpha = \Psi(\beta)$, то α получена из β и начальных функций с помощью конечного числа применений операций подстановки, примитивной рекурсии и обязательно минимизации. В этом случае существуют тотальные функции, результатом применения к которым операции минимизации являются частичные функции. Например, легко проверить, что $\alpha(x) = \mu y[s(y) = x] = \mu y[y + 1 = x]$ является частичной: $\alpha(0) \uparrow$. Итак, если в определении μ-оператора Ψ существенным образом используется операция минимизации, всегда найдется тотальная функция f, такая, что $\Psi(f)$ не является тотальной функцией. Следовательно, Ψ не является о.в. оператором, т.е. $M \nsubseteq GC_e$.

Осталось доказать, что $GC_e \nsubseteq M$. Это можно сделать с помощью критерия, при выполнении которого вычислимый оператор является μ-оператором. Такой критерий приведен в статье Д. Г. Скордева [4]. Для этого достаточно указать общерекурсивный оператор Ψ, переводящий некоторую частичную функцию α в некоторую тотальную функцию g. Одновременно заметим, что любой μ-оператор, в определении которого существенно используется функциональный символ α, частичную функцию α переводит в частичную функцию β. Это означает, что существует функциональный оператор $\Psi \in GC_e$, такой, что $\Psi \notin M$. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим сводимости множеств, введенные через определение 9.

Теорема 6. Для любых множеств A и B

$$A \leq_{\check{e}} B \Leftrightarrow A \leq_{\widetilde{ce}} B \Leftrightarrow A \leq_e B$$

Доказательство. Легко проверить, что $A \equiv_e graph(\chi_A)$ для любого множества A, следовательно, $A \leq_{\check{e}} B \Leftrightarrow A \leq_e B$. Оставшаяся часть теоремы непосредственно следует из леммы.

Лемма 4. $\chi_A \leq_{ce} \chi_B \Leftrightarrow \chi_A \leq_e \chi_B$ для любых множеств A и B.

Теорема 7. Для любых множеств A и B

$$A \leq_{\check{\mu}} B \Leftrightarrow A \leq_{\widetilde{gce}} B \Leftrightarrow A \leq_{pc} B$$

Доказательство. Из леммы 3 и определения $\leq_{\check{\mu}}$ следует, что

$$A \leq_{\check{\mu}} B \Leftrightarrow A \leq_{pc} B.$$

Лемма 5. $\chi_A \leq_{gce} \chi_B \Leftrightarrow A \leq_{pc} B$ для любых множеств A и B.

Лемма 5 является частным случаем теоремы Нероуда [8], когда табличная сводимость заменена на конъюнктивную сводимость.

Завершим доказательство теоремы. Из леммы 5 и определения $\leq_{\widetilde{gce}}$ следует, что $A \leq_{\widetilde{gce}} B \Leftrightarrow A \leq_{pc} B$.

Из теорем 6 и 7 следует, что использование функциональных операторов для введения сводимостей множеств с помощью определения 9 не дает новых сводимостей.

В заключение заметим, что сводимости $\leq_e$, $\leq_{ce}$, $\leq_{gce}$ и $\leq_\mu$ на PF, которые мы использовали в качестве базисных, различны. Их соотношения по силе отражены в теореме 5.

Библиографический список

1. *Поляков Е. А., Розинас М. Г.* Теория алгоритмов // Учебное пособие. ИвГУ, Иваново. 1976.
2. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость // М. : «Мир», 1972.
3. *Розинас М. Г.* Частичные степени и r-степени // Сибирский матем.ж.1974. Т. XV, №6. С. 1323—1331.
4. *Скордев Д. Г.* Изчислими и μ-рекурсивни оператори // Изв. матем. ин-т Българск. АН. 1963. Т. 7. С. 5—43.
5. *Скордев Д. Г.* О частичной конъюнктивной сводимости // II Всесоюзн. конф. по матем. логике. Тезисы. 1972. М. С. 43—44.
6. *Солон Б. Я.* е-степени гипериммунных ретрассируемых множеств // Сибирский матем. ж. 1978. Т. XIX, №1. С. 172—179.
7. *Gutterige L.* Some results on enumeration reducibility // Ph. D. dissertation. Simon Fraser University. 1971.
8. *Nerode A.* General topology and partial recursive functionals // Summaries of talks presented at the Summer institute for Symbolic Logic, Cornell Univ. 1957. P. 247—251.
9. *Sasso L. P.* Degrees of unsolvability of partial functions // Ph. D. Dissertation. University of California, Berkley. 1971.
10. *Sasso L. P.* A survey of partial degrees // J. Symb. Logic. 1975. T. 40, №2. P. 130—140.