УДК 511

В. Е. Гончаренко

МНОЖЕСТВО ПОДОБИЙ СИРАКУЗСКИМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ

Аннотация. Получено выражение для формирования числовых последовательностей, в котором сиракузские последовательности в соответствии с гипотезой Коллатца являются частным случаем. Выражение содержит произвольное значение целочисленного делителя. Проверялась возможность формирования числовых последовательностей, подобных сиракузским, для делителей от трех до тридцати, при этом начальные значения варьировались от единицы до ста миллионов. Для определенных значений делителей формировались последовательности, заканчивающиеся циклическим возвращением к значению единицы, как это наблюдается в сиракузских последовательностях. Делается вывод о возможности получения числовых последовательностей, подобных сиракузским.

Ключевые слова: сиракузские последовательности, гипотеза Коллатца, значение делителя, преобразование к делимости, множество подобий.

V. E. Goncharenko

MANY SIMILARITIES TO THE SYRACUSE SEQUENCES

Abstract. An expression for the formation of numerical sequences is obtained, in which the Syracuse sequences, in accordance with the Collatz hypothesis, are a special case. The expression contains an arbitrary integer divisor value. The possibility of forming numerical sequences similar to the Syracuse ones for divisors from three to thirty was tested, while the initial values ranged from one to one hundred million. For certain values of the divisors, sequences were formed ending in a cyclic return to the value of one, as is observed in the Syracuse sequences. It is concluded that it is possible to obtain numerical sequences similar to those of Syracuse.

Key words: Syracuse sequences, Collatz conjecture, divisor value, conversion to divisibility, set of similarities.

1. Введение

Ряд натуральных чисел, заканчивающийся единицей, в соответствии с гипотезой Коллатца называют сиракузской последовательностью или числом-градиной [2]. В работе [4] представлено выражение (1), в соответствии с которым для любого начального значения n вычисляются элементы последовательности

$$T(n) = \begin{cases} 3n+1, & \text{если} \quad n \equiv 1 \pmod 2, \\ n/2, & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases} \tag{1}$$

Если n четное, оно делится на 2, а в противном случае преобразуется в четное $3n+1$.

Гипотезу Коллатца математики называют самой простой нерешенной задачей. В работе [1] автор относит ее к задачам на будущее.

В работе [3] используется вероятностный способ рассмотрения сиракузской последовательности в противовес специальной теории функций, представленных в других работах. Делается вывод о том, что в сиракузской последовательности вероятность уменьшения произвольного числа n больше его увеличения, и единственным частичным пределом является цикл чисел 4, 2, 1.

2. Постановка задачи

Представляет интерес получение числовых последовательностей, подобных сиракузским. В обращенной сиракузской последовательности [4] используется делитель, равный трем, и два различных выражения приведения произвольного числа n к делимости на три. Если предположить использование произвольного значения делителя d, то по рассмотренной аналогии необходимо будет использовать $d-1$ вариантов преобразований к делимости без остатка, что делает невозможным представление необходимых преобразований в общем виде. Логично предположить, что и в случае рассмотрения произвольного значения целочисленного делителя необходимо предусмотреть всего два варианта: когда остаток равен нулю и когда он отличен от нуля. Это возможно только в том случае, если представить в общем виде преобразование текущего значения натурального числа к его делимости для всех значений целочисленных остатков, отличных от нуля. Выражение в общем виде должно охватывать и частный случай, когда делитель равен двум, то есть и вариант гипотезы Коллатца.

3. Формирование числовых последовательностей с произвольным значением делителя

В общем виде выражение для приведения текущего значения n к делимости на d будет иметь вид

$$(d+1)n + (d - \mathrm{mod}(n;d)),$$

где нотация $\mathrm{mod}(n;d)$ означает взятие целочисленного остатка от деления n на d.

Выражение для генерации числовой последовательности натуральных чисел n и произвольного значения натурального делителя d можно представить в следующем виде:

$$T(n,d) = \begin{cases} (d+1)n + (d - \mathrm{mod}(n;d)), & \text{если} \quad n \not\equiv 0 \pmod{d}, \\ n/d, & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod{d}. \end{cases} \qquad (2)$$

Представленное выражение также генерирует сиракузские последовательности при использовании значения делителя, равного двум.

Основное правило генерации очередного элемента последовательности заключается в преобразовании текущего значения к делимости на d, представленном в верхней строке выражения. Если в части выражения $(d+1)n$ раскрыть скобки, то получим $dn+n$. При любом значении n величина dn кратна делителю, и в дальнейшем необходимо только значение n преобразовать до значения $n+(d-\mathrm{mod}(n;d))$, что также становится кратным значению d. В конечном итоге сумма двух величин, кратных d, также будет кратна d. Эта же схема преобразования реализуется и в гипотезе Коллатца: множитель, равный трем, в общем виде можно представить как $d+1$, и после раскрытия скобок для $d=2$ получим $2n+n$.

Следует отметить, что в выражении (2) при приведении к делимости величины n содержащийся в ней любой остаток от целочисленного деления дополняется до значения делителя d.

В соответствии с (2) были выполнены расчеты для значений делителей от трех до тридцати для начальных значений натуральных чисел от единицы до 100 млн. Для значений делителей 5, 7, 8, 13, 18, 19, 21, 22, 26, 28 и 30 генерировались числовые последовательности, заканчивающиеся значением единицы с последующим бесконечным циклом возврата к значению единицы, как это наблюдается в сиракузских последовательностях. Для значений делителей, не вошедших в представленный перечень, при генерации числовых последовательностей возникало зацикливание до получения значения единицы для некоторых начальных значений натуральных чисел.

Сиракузские последовательности завершаются циклом 1, 4, 2, 1. Для числовых последовательностей с делителем, равным пяти, они заканчиваются циклом 1, 10, 2, 15, 3, 20, 4, 25, 5, 1, а числовая последовательность в качестве примера с начальным значением, равным семи, следующая:

$$7, 45, 9, 55, 11, 70, 14, 85, 17, 105, 21, 130, 26, 160, 32, 195, 39,$$
$$235, 47, 285, 57, 345, 69, 415, 83, 500, 100, 20, 4, 25, 5, 1.$$

Этой последовательности потребовался 31 шаг до получения единицы, и при этом достигалось наибольшее значение элемента, равное 500.

Алгоритм выражения (2) такой, что для значений n, меньших значения делителя, формируется элемент, равный $(n+1)d$, и на следующем шаге получаем значение элемента $n+1$. В конечном итоге $n+1$ будет равно делителю и последовательность циклически возвращается к значению 1.

4. Гипотезы

Выражение (2) для конкретного значения делителя, равного пяти, можно представить в следующем виде:

$$T(n) = \begin{cases} 6n + (5 - \operatorname{mod}(n;5)), & \text{если} \quad n \not\equiv 0 \pmod 5, \\ n/5, & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod 5. \end{cases}$$

Поскольку сиракузские последовательности в выражении (2) представлены частным случаем, можно предположить, что и для значений делителя больше двух будут формироваться числовые последовательности, в которых вероятность уменьшения текущего элемента больше вероятности его увеличения. Математическое утверждение без его доказательства по сути является гипотезой. В случае использования делителя, равного пяти, гипотезу (*гипотеза 5*) можно сформулировать следующим образом: для любого начального значения натурального числа n формируется ряд натуральных чисел, заканчивающийся циклическим возвращением к 1. Текущее значение n делится на пять, если оно кратно пяти, либо приводится к делимости по выражению $6n+5-\operatorname{mod}(n;5)$, где нотация $\operatorname{mod}(n;5)$ означает взятие целочисленного остатка при делении n на 5.

Относительно выражения (2) можно сформулировать следующую гипотезу (*гипотеза d*): для натуральных чисел n и d в соответствии с выражением (2) можно получить множество числовых последовательностей, подобных сиракузским.

5. Заключение

Получено выражение для формирования числовых последовательностей, в котором сиракузские последовательности в соответствии с гипотезой Коллатца являются частным случаем. Для ряда делителей больше двойки в проверенных диапазонах начальных значений формируются числовые последовательности, подобные сиракузским.

Библиографический список

1. *Стюарт И.* Величайшие математические задачи. М.: Альпина нон фикшн, 2015. 460 с.
2. *Хэйес Б.* Взлеты и падения чисел-градин // В мире науки. 1984. № 3. С. 102–107.
3. *Чечулин В. Л.* О вероятностном подходе к доказательству сходимости к циклу сиракузской последовательности // Вестник Пермского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 4 (43). С. 11–15.
4. *Lagarias J. C.* The $3x+1$ problem and its generalizations // Amer. Math. Monthly. 1985. Vol. 92. P. 3–23.

Информация об авторе / Information about the author

Гончаренко Валерий Евстафиевич – кандидат технических наук, доцент Ивановского филиала ФГБОУ ВО РЭУ им. Г. В. Плеханова, г. Иваново, Россия, V_E_G_A@mail.ru

Goncharenko Valery Evstafievich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Ivanovo Branch of the Plekhanov Russian University of Economics, Ivanovo, Russia, V_E_G_A@mail.ru