

# МАТЕМАТИКА

---

УДК 510.5+510.6+512.5

Д. Н. Азаров, Д. В. Туртин

## ИВАНОВСКАЯ ЛОГИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ШКОЛА

**Аннотация.** В статье уделено большое внимание становлению и развитию всемирно известной ивановской логико-алгебраической школы. Зарождение логико-алгебраической школы непосредственно связано с выдающимся математиком современности академиком А. И. Мальцевым. Указан вклад А. И. Мальцева и его учеников в развитие школы. Описано состояние ивановской алгебраической школы в настоящее время, её роль в современной математической науке.

**Ключевые слова:** математическая логика, алгебра, ивановская научная школа, развитие.

D. N. Azarov, D. V. Turtin

## IVANOVO LOGICAL-ALGEBRAIC SCHOOL

**Abstract.** The article pays much attention to the formation and development of the world-famous Ivanovo logical-algebraic school. The origin of the logical-algebraic school is directly related to the outstanding modern mathematician Academician A. I. Maltsev. The contribution of A. I. Maltsev and his students to the development of the school is indicated. The current state of the Ivanovo algebraic school and its role in modern mathematical science are described.

**Key words:** mathematical logic, algebra, Ivanovo scientific school, development.

Становление и развитие научно-исследовательской работы в области алгебры и математической логики в Ивановском государственном педагогическом институте (впоследствии — Ивановском государственном университете) явилось результатом работы в институте в течение многих лет выдающегося математика современности Анатолия Ивановича Мальцева [2, 3].

А. И. Мальцев родился 27 ноября 1909 года в семье рабочего-стеклодува Мишеронского стекольного завода Московской области. Окончив в 1927 году среднюю школу, он поступил на математическое отделение Московского университета. В 1931 году после окончания Московского университета А. И. Мальцев переезжает в Иваново и с 1932 года в течение почти тридцати лет до переезда в 1960 году в Новосибирский Академгородок непрерывно работает в Ивановском педагогическом институте сначала ассистентом, затем доцентом и профессором, заведя созданной им кафедрой высшей алгебры. Здесь он проводил интенсивную и весьма успешную научно-исследовательскую работу в области алгебры и математической логики, сочетая её с организацией и выполнением плодотворной педагогической деятельности, воспитал группу математиков, получившую неофициальное название Ивановской алгебраической школы.

---

© Азаров Д. Н., Туртин Д. В., 2025

2025. Вып. 1 •

За всю историю математического образования в Ивановской области с 1918 года и по настоящее время можно выделить несколько научных школ, такие как алгебраическая, аналитическая и геометрическая, представленные известными в России математиками. В данной статье речь пойдёт об алгебраической научной школе, основоположником которой был академик Мальцев.

В 30-е годы кафедрой математики Ивановского педагогического института заведовал профессор В. С. Фёдоров, приехавший в Иваново-Вознесенск из Москвы вместе с Н. Н. Лузиным и А. Я. Хинчиным в 1918 году. Именно он в 1932 году пригласил на работу в качестве ассистента кафедры математики А. И. Мальцева, который в то время работал в Ивановском энергетическом институте, куда был направлен после окончания МГУ в 1931 году. С момента образования физико-математического факультета, начиная с Н. Н. Лузина, преподавателями и студентами активно велась научная работа в различных областях фундаментальной математики.

Первые годы работы в Ивановском государственном педагогическом институте А. И. Мальцев успешно сочетает с учебой в аспирантуре под руководством академика А. Н. Колмогорова, и в 1937 году защищает кандидатскую диссертацию. В это время ярко проявились алгебраический и логический характер математического дарования Анатolia Ивановича, широта и разнообразие его научных интересов. Уже в первой своей работе, опубликованной в 1936 году и относящейся к математической логике, он доказывает теорему, известную в мировой математической литературе как «локальная теорема Мальцева» и явившуюся одним из самых сильных инструментов в исследованиях по математической логике и алгебре. Научные результаты, полученные А. И. Мальцевым в этот период, сделали имя молодого математика широко известным в международном математическом сообществе. Некоторые свои результаты А. И. Мальцев опубликовал в Ученых записках Ивановского педагогического института.

В предвоенные годы на физико-математическом факультете ИГПИ сформировался коллектив блестящих математиков, на долгие годы определивший высокий уровень математического образования. Вместо одной кафедры математики в 1938 году были организованы две: алгебры и геометрии (заведующий А. И. Мальцев) и математического анализа (заведующий А. В. Лотоцкий).

В 1938 году А. И. Мальцев, И. Н. Годнев и С. В. Смирнов организовали математический семинар. Несмотря на то, что главным образом на этом семинаре рассматривались проблемы алгебры и математической логики, его посещали математики всех специальностей из всех ивановских вузов. Этому семинару, существовавшему и в настоящее время под названием «Ивановский алгебраический семинар», суждено было сыграть серьезную роль в развитии алгебры и математической логики в нашей стране. В дальнейшем семинар перерос в Ивановское математическое общество, первым председателем которого был А. И. Мальцев.

В 1941 году Анатолий Иванович защитил докторскую диссертацию и, продолжая работать в Ивановском педагогическом институте, стал одновременно старшим научным сотрудником Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Два года (1943/44 и 1944/45 учебные го-

ды) на факультете лекции по высшей алгебре читал Леонид Яковлевич Куликов (основным местом его работы был Ивановский текстильный институт). В 1944 году возвратилась из эвакуации семья Мальцевых. После тяжелого ранения, полученного под Ленинградом, был демобилизован А. А. Виноградов. В результате на факультете вновь образовался сильный математический коллектив.

За цикл работ по теории групп и алгебр Ли профессор А. И. Мальцев в 1946 году получил Государственную премию. В это время А. И. Мальцев занимался также общей теорией алгебраических систем, в 1951 году начал работать над монографией «Алгебраические системы». В 1953 году он был избран членом-корреспондентом, а в 1958 году — действительным членом АН СССР.

Исклучительно большое внимание А. И. Мальцев уделял вопросам преподавания математики в средней и высшей школе. В своей статье «Математика нужна всем», опубликованной в газете «Правда» в 1967 году, он подчеркивал необходимость создания новых университетских центров и усиления роли университетского образования в подготовке учителей средней школы. И сам Анатолий Иванович постоянно выполнял большую педагогическую работу и всей этой деятельностью способствовал тому, чтобы преподавание математики в Ивановском пединституте соответствовало университетским требованиям. Здесь он, впервые в стране, начал читать курс математической логики, который впоследствии по его инициативе был включен в учебные планы педагогических институтов и университетов. Книга А. И. Мальцева «Основы линейной алгебры», неоднократно переиздававшаяся в нашей стране и за рубежом, по праву считается одним из лучших учебников по линейной алгебре. Спецкурсы и спецсеминары, которые вёл А. И. Мальцев в Ивановском пединституте в 1956–59 годах и в Новосибирском университете в 1960 году, отражены в его монографии «Алгоритмы и рекурсивные функции». В предисловии к книге А. И. Мальцева «Алгебраические системы», вышедшей в издательстве «Наука» в 1970 году, редакторы книги Д. М. Смирнов, М. А. Тайцлин и Ф. И. Кизнер писали: «В 1953 году машинописный экземпляр первой части этой книги был передан А. И. Мальцевым в математический кабинет Ивановского пединститута и с тех пор доступен для многих советских алгебраистов».

Математическое творчество А. И. Мальцева характеризуется насыщенностью новыми идеями, созданием новых математических направлений наряду с решением ряда классических проблем. Значительное внимание он уделял и научно-организационной работе. В статье, опубликованной в газете «Советская Россия» (1964 г.), Анатолий Иванович писал: «Есть одна общая цель, которая является смыслом жизни каждого большого ученого — обеспечить подготовку молодой научной смены».

В начале 50-х годов стала складываться Ивановская логико-алгебраическая школа (или просто «Ивановская школа Мальцева»). В период с 1950-го по 1960-й годы к этой школе следует отнести А. А. Виноградова, А. Т. Гайнова, М. И. Зайцеву, Д. А. Захарова, Л. Я. Куликова, Н. Н. Мягкову (Соколову), В. А. Емеличева, Д. М. Смирнова, А. Д. Тайманова, М. А. Тайцлина, Е. А. Халезова. В этот период были студентами Е. А. Поляков (ученик Захарова), А. И. Черемисин и И. А. Лавров, они на-

чили свою научную деятельность и сложились как математики в алгебраической школе Мальцева.

Участник Великой Отечественной войны Евгений Александрович Халезов поступил на математический факультет Ивановского педагогического института в 1945 году. С первых месяцев он активно включился в учебный процесс, его заметил профессор А. И. Мальцев и пригласил в свой спецсеминар, что определило дальнейшую судьбу Халезова. В 1954 году Е. А. Халезов защитил кандидатскую диссертацию в МГУ. Достойный ученик замечательного ученого и педагога, он до последних дней своей жизни сохранял на факультете дух творчества, взаимного уважения и преданности общему делу. Многие поколения студентов помнят Е. А. Халезова как отменного лектора, доброго, отзывчивого и справедливого декана математического факультета.

С 1960 года А. И. Мальцев работал в Институте математики Сибирского отделения АН СССР, заведя отделом алгебры, и в Новосибирском государственном университете, возглавляя кафедру алгебры и математической логики. Здесь он основал всемирно известный семинар «Алгебра и логика» и научный журнал с тем же названием, был главным редактором «Сибирского математического журнала». Он был первым президентом созданного им Сибирского математического общества, объединившего математиков Сибири и Дальнего Востока.

После отъезда Анатолия Ивановича в Новосибирск на кафедре алгебры ИГПИ остались работать его ученики Д. М. Смирнов и Е. А. Халезов. Кафедру возглавил Д. А. Захаров, которого также можно считать учеником А. И. Мальцева, хотя кандидатскую диссертацию он написал по топологии под руководством В. А. Ефремовича. Благодаря им, на кафедре (и в целом на математическом факультете) сохранилась атмосфера научного творчества, продолжал работать созданный А. И. Мальцевым алгебраический семинар, активным участником которого стал и М. Д. Гриндингер, переехавший в Иваново по приглашению А. И. Мальцева и приступивший к работе на кафедре в 1960 году.

М. Д. Гриндингер — крупный специалист в области теории групп, приехавший в Советский Союз из США, где он был учеником и сотрудником Вильгельма Магнуса, известного немецкого и американского математика, одного из создателей значительного раздела современной теории групп, называемого теперь комбинаторной теорией групп. Интересно отметить, что Магнус был учеником Дэна, который, в свою очередь, был учеником Гильберта. Гриндингер создал в СССР (в Иванове и в Туле) неформальную научную школу, которая специализировалась на комбинаторной теории групп. В основе комбинаторной теории групп лежит идея задания группы порождающими символами и определяющими соотношениями, т. е. такими соотношениями между порождающими, из которых можно вывести все соотношения, имеющие место в данной группе. М. Д. Гриндингер занимался алгоритмическими проблемами комбинаторной теории групп, сформулированными в свое время Дэном. Его результаты о группах с малым сокращением приобрели широкую известность. Тем не менее, считать, что начало исследований в области теории групп на кафедре связано с приходом на неё Гриндингера, было бы неверным — до его прихода теорией групп на кафедре занимались А. И. Мальцев и Д. М. Смирнов. Учени-

ками М. Д. Гриндлингера являются Д. И. Молдаванский, Е. В. Кашинцев, В. В. Солдатова, а также тульские алгебраисты А. Е. Устян, В. Н. Безверхний (и его ученица И. В. Добрынина).

На протяжении долгих лет кафедра алгебры и математической логики Ивановского государственного университета (и упомянутый семинар) возглавлялись Давидом Ионовичем Молдаванским — крупным специалистом в области теории групп, хранителем и продолжателем традиций Ивановской алгебраической школы. Давид Ионович родился 1 декабря 1940 года в Киеве. В 1958 году после окончания средней школы он приступил к учебе на математическом факультете Ивановского государственного педагогического института. Как признаётся Давид Ионович, выбор направления и места продолжения учёбы не был им предопределён, но уже после первых прослушанных лекций он понял, что хочет и может заниматься математикой.

Давид Ионович застал то замечательное время, когда математическая (и, в частности, алгебраическая) наука в нашей стране достигла высочайшего уровня как по значимости научных открытий, так и по масштабу исследований. Именно в это время Ивановская логико-алгебраическая школа приобрела максимальную известность. Формирование научных интересов Давида Ионовича происходило под влиянием учеников и последователей Мальцева (таких как Д. М. Смирнов и его ученик А. И. Черемисин). Уже в студенческие годы Д. И. Молдаванский начал посещать заседания Ивановского алгебраического семинара. Как вспоминает Давид Ионович, семинар в немалой степени способствовал его математической подготовке, ему всегда нравилась работа, связанная с проверкой научных результатов перед их публикацией, и за эту работу (уже будучи аспирантом) он заслужил следующую похвалу от Игоря Андреевича Лаврова: «Уж если Давид не нашёл, к чему придаться, статью можно публиковать».

Первые научные результаты Давида Ионовича, полученные им под влиянием А. И. Черемисина, были связаны с одним обобщением понятия упорядоченной полугруппы. За эти результаты (следов которых, к сожалению, не осталось) он был удостоен похвалы от Александра Геннадиевича Куроша на алгебраической конференции, проходившей в Кишинёве. В тот период Всесоюзные алгебраические конференции (тогда они назывались коллоквиумами) проводились ежегодно по инициативе А. Г. Куроша и А. И. Мальцева.

В 1964 году Давид Ионович поступил в аспирантуру к Мартину Давидовичу Гриндлингеру. В аспирантские годы он получил замечательные результаты по одному из важнейших направлений комбинаторной теории групп, которое занимается группами с одним определяющим соотношением. Его результаты предопределили дальнейшее развитие этого направления на несколько десятилетий вперёд. О своих результатах Давид Ионович сообщил на Международном конгрессе математиков, который проходил в Москве в 1966 году. Значимость этих результатов состояла в том, что Давид Ионович нашёл новый метод исследования групп с одним соотношением. Метод состоит в использовании теоретико-групповой конструкции HNN-расширения. В дальнейшем этот метод применялся практически во всех исследованиях групп с одним соотношением.

Давид Ионович стал свидетелем и участником той эпохи, когда комбинаторная теория групп формировалась как самостоятельная наука. Он принимал участие в переводе на русский язык знаменитой и до сих пор востребованной книги В. Магнуса, А. Карраса и Д. Солитэра «Комбинаторная теория групп». Эта книга подводила итог начальному этапу развития комбинаторной теории групп. В следующем аналогичном издании — одноимённой книге Р. Линдона и П. Шуппа — содержатся многочисленные ссылки уже на работы самого Давида Ионовича.

Почти сразу после защиты кандидатской диссертации (в 1968 году) Д. И. Молдаванский включился в работу по подготовке аспирантов, считая эту деятельность чрезвычайно важной как для математической науки вообще, так и для математического факультета в частности.

Аспирантами Д. И. Молдаванского «первой волны» были А. П. Горюшкин (работавший впоследствии проректором Камчатского университета), Л. М. Шнеерсон (профессор Нью-Йоркского городского университета, известный ученый, специалист в области теории полугрупп), А. И. Зимин (ученик Л. М. Шнеерсона), С. Д. Бродский (получивший глубокие результаты о разрешимости уравнений над группами), В. Н. Егоров (возглавлявший Ивановский государственный университет на протяжении двух десятилетий). Результаты В. Н. Егорова и С. Д. Бродского до сих пор не преиздадены.

В 1973 году Д. И. Молдаванский (по настоятельной просьбе декана математического факультета Е. А. Халезова) занял должность заведующего кафедрой высшей алгебры и занимал её (с перерывом в 1984–1988 годах, когда кафедрой заведовал Владимир Николаевич Егоров) до 2010 года. По его предложению, чтобы отразить весь спектр проводимых научных исследований, кафедра была переименована в кафедру алгебры и математической логики.

На кафедре Давид Ионович создал уникальный научно-педагогический коллектив, состоящий из преподавателей, аспирантов и вовлечённых в научную работу студентов. Состав этого коллектива время от времени менялся, но неизменным оставался основной принцип обучения, состоящий в том, что подготовка квалифицированного математика (в том числе, учителя математики) не возможна без его знакомства с научно-исследовательской работой. Дипломные работы большинства выпускников кафедры содержали пусть небольшие, но, тем не менее, новые научные результаты.

В связи с переходом пединститута на университетский учебный план Давид Ионович фактически с нуля организовал специализацию студентов по алгебре и теории чисел. Специализация предусматривала (наряду с написанием дипломных работ) систему авторских спецкурсов, которые охватывали различные разделы современной алгебры. Чтение некоторых спецкурсов Давид Ионович доверял молодым сотрудникам кафедры, что несомненно способствовало их профессиональному росту. Он часто говорил, что наиболее продуктивный способ изучения какой-либо математической дисциплины состоит в том, чтобы разработать и прочитать курс лекций по этой дисциплине. Лекции Давида Ионовича всегда отличались четкостью формулировок теорем и определений, продуманным изложением материала и уважительным отношением к слушателям.

Наряду с исследованиями в области алгебры на кафедре изучались также вопросы математической логики. По существу, Д. И. Молдаванский и Е. А. Поляков возглавляли две неформальные математические школы, соответственно, по комбинаторной теории групп и по теории алгоритмов и рекурсивных функций. К числу учеников А. Е. Полякова относятся А. И. Щеглов (работавший впоследствии деканом математического факультета ИвГУ и проректором по учебной работе ИвГУ), М. Г. Розинас, П. Лорентс (работавший заместителем директора Института кибернетики АН ЭССР), а также Борис Яковлевич Солон, возглавлявший факультет математики и компьютерных наук ИвГУ (с 2013 года и до момента его реорганизации) и одновременно принявший от Д. И. Молдаванского заведование кафедрой алгебры и математической логики.

Начиная с 90-х годов, Д. И. Молдаванским и возглавляемым им научным коллективом проводились интенсивные исследования финитной аппроксимируемости и других аппроксимационных свойств групп. Изучалось поведение этих свойств относительно свободных конструкций — обобщённых свободных произведений и HNN-расширений. Исследования в этом направлении, начатые в США более шестидесяти лет тому назад, до сих пор привлекают внимание многих специалистов в области теории групп. В этом направлении Давидом Ионовичем проводилась большая научная и преподавательская работа. На рубеже XX и XXI веков эта работа сопровождалась появлением у него «второй волны» учеников: Д. Н. Азаров (доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ИвГУ), Е. Д. Логинова, Е. А. Иванова, Д. Тъеджо, Е. В. Соколов (доктор физико-математических наук, зав. кафедрой фундаментальной математики ИвГУ), О. Е. Сенкевич, Е. А. Туманова.

В этот период продолжает свою работу алгебраический семинар, постоянными участниками которого являются Д. И. Молдаванский, Д. Н. Азаров, Е. В. Соколов, Н. И. Яцкин. Некоторых участников этого семинара регулярно приглашают в МГУ на семинар по теории групп под руководством А. Л. Шмелькина, А. Ю. Ольшанского и А. А. Клячко.

Давид Ионович проявляет постоянную заботу о своих учениках, поддерживает их стремление к научному и профессиональному росту. Как признаётся Д. Н. Азаров, он был и продолжает оставаться учеником Давида Ионовича. Научные исследования Д. Н. Азарова не относятся в полной мере к комбинаторной теории групп, они объединяют классические подходы к изучению финитной аппроксимируемости, восходящие к Мальцеву, и некоторые современные подходы к изучению свободных конструкций. На этом пути ему удалось получить обобщения результатов А. И. Мальцева, Д. М. Смирнова, А. Л. Шмелькина, Д. И. Молдаванского и ряда зарубежных алгебраистов. Учителем Д. Н. Азарова является А. В. Розов.

В 2013 году Б. Я. Солон возглавил факультет математики и компьютерных наук ИвГУ (и кафедру алгебры и математической логики), проделав перед этим большой путь ученого и преподавателя сначала в Шуйском пединституте, а затем в ИГХТУ, где заведовал кафедрой высшей математики более 15 лет. Судьба распорядилась так, что Борис Яковлевич вернулся на тот факультет, который когда-то закончил, и, будучи студентом и аспирантом которого, стал свидетелем эпохи, когда Ивановская матема-

тическая школа имела колоссальное значение в мировой науке, а факультет пользовался заслуженным почетом и уважением [1].

Усилиями Б. Я. Солона в ИвГУ были организованы масштабные научные логико-алгебраические конференции. Так, например, конференция, посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук, собрала в 2018 году блестящий состав участников. Гостями конференции были представители теоретико-групповых школ из Сибирского отделения РАН, Московского и Петербургского университетов, Московского педагогического университета. Приехали известные ученые из Казани, Тулы, Ярославля.

Ивановская логико-алгебраическая школа сохраняет свою известность в научном сообществе. Ивановский университет посещают выдающиеся математики, в том числе академик Л. Д. Беклемишев, А. Ю. Ольшанский (профессор МГУ и Университета Вандербильта (США)). Научная коллaborация кафедры фундаментальной математики с учеными из МГУ и Сибирского отделения РАН состоялась в полной мере. Ее результатами стал ряд совместных статей, регулярное оппонирование кандидатских и докторских диссертаций.

Ивановцы глубоко чтят память об А. И. Мальцеве — знаменитом ученом, много сделавшем для становления высшего образования в нашем городе. Об этом напоминает мемориальная доска на главном корпусе Ивановского государственного университета. Именем А. И. Мальцева названа прилегающая к университету улица. Периодически в университете проводятся логико-алгебраические конференции «Мальцевские чтения». В качестве почетных гостей на такие конференции обычно приезжают выдающиеся ученые, родные и близкие Анатолия Ивановича, среди них — академик РАН Л. Д. Беклемишев.

#### *Библиографический список*

1. Азаров Д. Н. Б. Я. Солон — хранитель и продолжатель традиций Ивановской логико-алгебраической школы // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2023. Вып. 4. С. 78–81.
2. Молдаванский Д. И. 40 лет научной логико-алгебраической школе ИвГУ: итоги и перспективы // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. Биология. Химия. Физика. Математика. С. 75–80.
3. Молдаванский Д. И. Комбинаторная теория групп в Ивановском государственном университете // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, вып. 4. С. 32–54.

#### *Информация об авторах / Information about the authors*

**Азаров Дмитрий Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, azarovdn@mail.ru

**Azarov Dmitry Nikolaevich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, azarovdn@mail.ru

**Туртин Дмитрий Витальевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Ивановский государственный университет, г. Иваново, Россия, turtin@mail.ru

**Turtin Dmitry Vitalievich** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Ivanovo State University, Ivanovo, Russia, turtin@mail.ru