УДК 511

В. Е. Гончаренко

ФОРМИРОВАНИЕ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ПОДОБНЫХ СИРАКУЗСКИМ

Аннотация. Используется выражение для формирования числовых последовательностей натуральных чисел с произвольным значением делителя, в котором сиракузские последовательности в соответствии с гипотезой Коллатца являются частным случаем. Для делителя, равного трем, в диапазоне начальных значений от единицы до 100 млн предоставляется возможность генерации последовательностей, подобных сиракузским, если использовать различные приемы приведения к делимости. Для значения делителя от 1000 до 1010 и при варьировании начальных значений от единицы до 100 млн во всех случаях эти последовательности заканчиваются значением единицы, подобно сиракузским последовательностям. Для таких рядов характерно незначительное увеличение после приведения к делимости и последующего деления. Делается вывод о возможности генерации неограниченного числа последовательностей, подобных сиракузским.

Ключевые слова: сиракузские последовательности, гипотеза Коллатца, значение делителя, преобразование к делимости, множество подобий.

V. E. Goncharenko

FORMATION OF NUMERICAL SEQUENCES SIMILAR TO THOSE OF SYRACUSE

Abstract. An expression is used to form numerical sequences of natural numbers with an arbitrary value of the divisor, in which the Syracusan sequences are a special case according to Collatz's hypothesis. For a divisor equal to three, in the range of initial values from one to 100 million, it is possible to generate sequences similar to those of Syracuse if various methods of reduction to divisibility are used. For a divisor value from 1000 to 1010, and when the initial values are varied from one to 100 million, in all cases these sequences end with the value of one, similar to the Syracusan sequences. Such series are characterized by a slight increase after reduction to divisibility and subsequent division. It is concluded that it is possible to generate an unlimited number of sequences similar to the Syracuse sequences.

Key words: Syracuse sequences, Collatz conjecture, divisor value, conversion to divisibility, set of similarities.

В работе [1] представлено выражение (1) для генерации числовых последовательностей натуральных чисел с произвольным значением делителя d:

$$T(n,d) = \begin{cases} (d+1)n + \big(d - \mathrm{mod}(n;d)\big), & \text{если} \quad n \not\equiv 0 \pmod d, \\ n/d, & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod d, \end{cases} \tag{1}$$

где нотация $\mathrm{mod}(n;d)$ означает взятие остатка от целочисленного деления n на d.

В соответствии с (1) для любого начального значения числа n выполняется его деление на d, если n кратно d, а в противном случае n преобразуется к кратности. Если в выражении преобразования к делимости раскрыть скобки, то получим

$$dn + n + \bigl(d - \mathrm{mod}(n; d)\bigr). \tag{2}$$

Если в (2) подставить значение делителя, равного двум, то получим известное выражение $3n + 1$ гипотезы Коллатца для формирования числовых последовательностей, получивших название «сиракузские последовательности». Таким образом, формирование сиракузских последовательностей в соответствии с (1) является частным случаем.

Преобразованное к делимости значение n предсказуемо делится на d, поэтому это значение можно считать промежуточным и не фиксировать его в числовой последовательности. В этом случае выражение для генерации числовых последовательностей принимает вид

$$T(n,d) = \begin{cases} n + \bigl(n + d - \mathrm{mod}(n; d)\bigr)/d, & \text{если} \quad n \not\equiv 0 \pmod d, \\ n/d, & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod d. \end{cases} \tag{3}$$

Ряды чисел в соответствии с (3) более наглядно отражают характер изменений элементов последовательности, в том числе при использовании больших значений делителя d.

Значение делителя и множителя являются параметрами генерации числовых последовательностей. В гипотезе Коллатца они принимают крайние значения, при уменьшении делителя или увеличении множителя происходит вырождение системы генерации числовых последовательностей.

При использовании делителя больше двух при любом значении остатка от целочисленного деления в величине n прибавляется к остатку дополнение до значения делителя.

Экспериментальные вычисления в соответствии с (1) для значений делителя от 3 до 60 и при варьировании начальных значений n от 1 до 100 млн показали, что для делителей 5, 7, 8, 13, 18, 19, 21, 22, 26, 28, 30, 32..47, 49..53, 55, 56, 58, 59 и 60 генерировались числовые последовательности, заканчивающиеся значением единицы, с последующим бесконечным циклом возврата к значению единицы, как это наблюдается в сиракузских последовательностях. Таким образом, можно заключить, что как минимум в проверенном диапазоне начальных значений n для указанных значений делителей выражение (1) генерирует множество числовых последовательностей, подобных сиракузским.

Представляют интерес и ситуации, когда для некоторых значений делителей в рассмотренном диапазоне не генерируются последовательности, заканчивающиеся значением единицы. В этих случаях возникает зацикливание генерации натуральных чисел до получения единицы. Важно отметить, что не происходит устремлений значений элементов последовательности в бесконечность. В работе [3] используется вероятностный способ рассмотрения сиракузской последовательности в противовес специальной теории функций, представленной в других работах. Делается вывод о том, что в сиракузской последовательности вероятность уменьшения произвольного числа n больше его увеличения и единственным частичным пределом является цикл чисел 4, 2, 1. Поскольку в системе генерации числовых последовательностей (1) генерация сиракузских последовательностей является частным случаем, допустимо предположить, что и для значений делителя больше двух генерируются последовательности, для которых мера уменьшения элементов последовательности больше меры их увеличения. Случаи зацикливания можно продемонстрировать на примере использования делителя $d = 57$. Для начального значения $n = 2089$ наблюдается первый случай зацикливания, и он повторяется для значений 2126, 2164, 2202, 2241, 2281 и т. д. Между точками зацикливания находятся порядка сорока начальных значений n, для которых ряд генерируемых чисел заканчивается единицей.

В выражении обратной гипотезы Коллатца [4] используется делитель, равный трем, и для случаев целочисленных остатков 1 и 2 реализуются различные способы приведения к делимости. Если остаток равен 1, то единица вычитается из n, а в случае равенства 2 единица прибавляется к n. Отредактируем выражение (1) для делителя $d = 3$ и указанных приемов приведения к делимости и получим выражение

$$T(n) = \begin{cases} 4n - 1, & \text{если} \quad n \equiv 1 \pmod 3, \\ 4n + 1, & \text{если} \quad n \equiv 2 \pmod 3, \\ n/3, & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod 3. \end{cases} \tag{4}$$

При варьировании начального значения n от 1 до 100 млн числовые последовательности в соответствии с (4) заканчиваются единицей. В качестве примера можно привести последовательность с начальным значением $n = 10$:

$$10,\ 39,\ 13,\ 51,\ 17,\ 67,\ 23,\ 93,\ 31,\ 123,\ 41,\ 165,\ 55,$$
$$219,\ 73,\ 291,\ 97,\ 387,\ 129,\ 43,\ 171,\ 57,\ 19,\ 75,\ 25,$$
$$99,\ 33,\ 11,\ 45,\ 15,\ 5,\ 21,\ 7,\ 27,\ 9,\ 3,\ 1.$$

Этой последовательности потребовалось 36 шагов для достижения единицы, достигалось наибольшее значение 387.

Генерация элементов в соответствии с (4) отличается от генерации в соответствии с (1) для делителя $d = 3$ только приведением к делимости для остатка, равного единице. Если при генерации в соответствии с (1) возникает зацикливание, то при использовании выражения (4) отсутствует повторная генерация элементов с одинаковым значением как причина зацикливания. В итоге можно заключить, что в проверенном диапазоне начальных значений n выражение (4) генерирует числовые последовательности, подобные сиракузским. Наблюдения за ходом генерации числовых последовательностей демонстрируют, что если отсутствует зацикливание для относительно небольшого диапазона начальных значений n, то и до конца проверяемого диапазона его не будет. В этом кроется основная загадка успешной генерации числовых последовательностей, подобных сиракузским.

Для сиракузских последовательностей, если элемент — четное число, то оно уменьшается в 2 раза, а нечетное после преобразования к делимости и последующего деления увеличивается практически в 1,5 раза. Такая мера увеличения является самой большой по сравнению с последовательностями с большим значением делителя и ближе всего к мере уменьшения.

В соответствии с (1) после приведения к делимости и последующего деления элемент последовательности принимает значение примерно $n + n/d$, и с увеличением d мера увеличения становится все меньше.

Ряд натуральных чисел ограничен снизу значением единицы и в соответствии с доказательством великого Евклида не имеет верхней границы. Логично заключить, что при неограниченном числе шагов генерации чисел в соответствии с (1) неизбежно стремление к значению 1.

При использовании $d = 2$ единственное значение, которое может принять элемент последовательности меньше делителя, это единица, что является и завершением последовательности и началом единственного бесконечного цикла 1, 4, 2, 1. Другая картина наблюдается при использовании относительно больших значений делителя. Были выполнены экспериментальные вычисления в соответствии с (1) для ряда значений делителя от 1000 до 1010 и при варьировании начальных значений n от 1 до 100 млн. Во всех случаях числовые последовательности заканчиваются значением единицы с последующим бесконечным циклом возврата к единице, подобно сиракузским последовательностям. Ниже представлен числовой ряд с параметрами $d = 1001$ и $n = 1028$ в соответствии с (3) в сокращенном варианте:

$$1028,\ 1030,\ 1032,\ 1034,\ \ldots,\ 1996,\ 1998,\ 2000,\ 2002,$$
$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ 1001,\ 1.$$

Для достижения единицы потребовалось 1488 шагов, а наибольшее значение равно 2002. Такая последовательность подобна сиракузской только тем, что завершается единицей. В начале ряда элементы монотонно возрастают на две единицы, достигая кратного делителю значения 2002, и на следующем шаге после деления получаем значение 2, на что потребовалось 489 шагов из их общего количества 1488. В соответствии с алгоритмом (3) с любого значения элемента, меньшего делителя, с каждым шагом они увеличиваются на единицу до значения делителя, и на следующем шаге ряд завершается значением единицы.

Если использовать терминологию работы [2], то можно сказать, что при использовании больших значений делителя у числа-градины не наблюдается головокружительных взлётов, а только головокружительные падения. Возникает желание сбалансировать увеличение и уменьшение элементов последовательности и сделать последовательность в большей мере подобной сиракузской, что можно выполнить за счет увеличения множителя в выражении преобразования к делимости

$$(d + k)n + k\big(d - \mathrm{mod}(n; d)\big),$$

где k — натуральное число 1, 2, 3 и т. д.

При тех же параметрах $d = 1001$ и $n = 1028$ для $k = 1000$ получим такой короткий ряд:

$$1028,\ 2002,\ 2,\ 1000,\ 1001,\ 1.$$

Для начального значения $n = 12\,345\,678$ получим числовой ряд, который будет в большей мере подобен сиракузскому, до достижения единицы ему потребовалось 2593 шага, наибольшее значение равно 661 999 133.

Для всех рассмотренных случаев генерации числовых последовательностей, подобных сиракузским, невозможно проверить весь диапазон начальных значений натурального числа. Допустимо сформулировать гипотезу:

На основании выражения (1) *можно генерировать неограниченно много числовых последовательностей, подобных сиракузским.*

Библиографический список

1. *Гончаренко В. Е.* Множество подобий сиракузским последовательностям // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2024. Вып. 2. С. 133–136.
2. *Хэйес Б.* Взлеты и падения чисел-градин // В мире науки. 1984. № 3. С. 102–107.
3. *Чечулин В. Л.* О вероятностном подходе к доказательству сходимости к циклу сиракузской последовательности // Вестник Пермского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 4 (43). С. 11–15.
4. *Lagarias J. C.* The $3x+1$ problem and its generalizations // Amer. Math. Monthly. 1985. Vol. 92. P. 3–23.

Информация об авторе / Information about the author

Гончаренко Валерий Евстафиевич – кандидат технических наук, доцент Ивановского филиала ФГБОУ ВО РЭУ им. Г. В. Плеханова, г. Иваново, Россия, V_E_G_A@mail.ru

Goncharenko Valery Evstafievich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Ivanovo Branch of the Plekhanov Russian University of Economics, Ivanovo, Russia, V_E_G_A@mail.ru