УДК 511

В. Е. Гончаренко

ИНДУКТИВНЫЙ ПОДХОД К ГИПОТЕЗЕ КОЛЛАТЦА

Аннотация. Посредством индуктивного подхода к гипотезе Коллатца получено выражение для формирования числовых последовательностей при использовании любого натурального значения делителя. Выполнены вычисления для значений делителей в диапазоне от 3 до 120, при этом начальные значения натурального числа варьировались от единицы до одного миллиарда. Для ряда делителей устойчиво формируются числовые последовательности, заканчивающиеся значением 1, подобно сиракузским последовательностям. Приведены формулировки гипотез, аналогичных гипотезе Коллатца.

Ключевые слова: индуктивный подход, гипотеза Коллатца, значение делителя, сиракузские последовательности, множество подобий, формулировки гипотез.

V. E. Goncharenko

INDUCTIVE APPROACH TO THE COLLATZ CONJECTURE

Abstract. By applying an inductive approach to the Collatz conjecture, we obtain an expression for the formation of numerical sequences using any natural value of the divisor. Calculations were performed for divisor values ranging from 3 to 120, with initial values of the natural number varying from 1 to 1 billion. For a number of divisors, numerical sequences are consistently formed that end with the value 1, similar to the Syracuse sequences. Hypotheses similar to the Collatz conjecture are presented.

Key words: inductive approach, Kollatz conjecture, divisor value, Syracuse sequences, set of similarities, hypothesis formulation.

Ряд натуральных чисел, заканчивающийся единицей, в соответствии с гипотезой Коллатца называют сиракузской последовательностью или числом-градиной [1]. В работе [3] представлено выражение (1), в соответствии с которым для любого начального значения n вычисляются элементы последовательности

$$T(n) = \begin{cases} 3n+1, & \text{если} \quad n \equiv 1 \pmod 2, \\ n/2, & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases} \tag{1}$$

Если n четное, оно делится на 2, а в противном случае преобразуется в четное $3n+1$.

Выражение (1) можно представить как частный случай генерации числовых последовательностей, параметрами которого являются значения делителя, равного двум, и множителя, равного трем, в формуле преобразования к делимости. Используя индуктивный подход, представим для общего случая значение делителя как число d, принимающее любое натуральное значение. При использовании значения $d = 2$ формулу преобразования к делимости можно представить в следующем виде $(d+1)n+1$, и после раскрытия скобок получим $dn+n+1$. Величина dn при любом значении n кратна делителю. При использовании делителя, равного двум, ненулевой целочисленный остаток от деления принимает единственное значение, равное единице, поэтому можно сделать вывод, что в сумме $n+1$ роль единицы заключается в дополнении целочисленного остатка до значения делителя, таким образом, получается величина, кратная делителю. В итоге сумма всех слагаемых формирует величину, кратную делителю. При использовании делителя, большего двух, могут получаться различные значения ненулевых целочисленных остатков, а их количество будет равно $d-1$, следовательно, для каждого конкретного значения целочисленного остатка необходимо к значению n прибавлять соответствующее дополнение до значения делителя. Величину соответствующего дополнения можно определить по выражению

$$d - \operatorname{mod}(n; d),$$

где нотация $\operatorname{mod}(n; d)$ означает взятие остатка от целочисленного деления n на d.

В конечном итоге получим следующее выражение (2) для генерации числовых последовательностей при любом натуральном значении делителя d:

$$T(n,d) = \begin{cases} (d+1)n + \big(d - \operatorname{mod}(n;d)\big), & \text{если} \quad n \not\equiv 0 \pmod{d}, \\ n/d, & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod{d}. \end{cases} \tag{2}$$

Преобразованное к делимости значение n предсказуемо делится на d, поэтому это значение можно считать промежуточным и не фиксировать его в числовой последовательности. В этом случае выражение для генерации числовых последовательностей принимает вид (3)

$$T(n,d) = \begin{cases} n + \big(n + d - \operatorname{mod}(n;d)\big)/d, & \text{если} \quad n \not\equiv 0 \pmod{d}, \\ n/d, & \text{если} \quad n \equiv 0 \pmod{d}. \end{cases} \tag{3}$$

Выполнены экспериментальные вычисления в соответствии с (2) для значений делителей от 3 до 120, при этом начальные значения n варьировались от единицы до 1 млрд. Для делителей 5, 7, 8, 13, 18, 19, 21, 22, 26, 28, 30, 32..47, 49..53, 55, 56, 58..67, 69..71, 73..77, 79..84, 86..93, 95..107, 109..114, 116, 117 и 120 (всего 88 значений) генерировались числовые последовательности, заканчивающиеся значением единицы с последующим бесконечным циклом возврата к значению единицы, как это наблюдается в сиракузских последовательностях. Таким образом, можно заключить, что, как минимум, в проверенном диапазоне начальных значений n для указанных значений делителей выражение (2) генерирует множество числовых последовательностей, подобных сиракузским.

Представляют интерес и ситуации, когда для некоторых значений делителей в рассмотренном диапазоне не генерируются последовательности, заканчивающиеся значением единицы. В этих случаях возникает зацикливание генерации натуральных чисел до получения единицы. Важно отметить, что не происходит устремлений значений элементов последовательности к бесконечности. Случаи зацикливания можно продемонстрировать на примере использования делителя $d = 57$. Для начального значения $n = 2089$ наблюдается первый случай зацикливания, и он повторяется для значений 2126, 2164, 2202, 2241, 2281 и т. д. Между точками зацикливания находятся порядка сорока начальных значений n, для которых ряд генерируемых чисел заканчивается единицей. Во всех случаях зацикливание реализуется в интервале значений n, больших делителя до 1 млн., и в дальнейшем многократно повторяется.

В работе [2] используется вероятностный способ рассмотрения сиракузской последовательности, делается вывод о том, что в сиракузской последовательности вероятность уменьшения произвольного числа n больше его увеличения и единственным частичным пределом является цикл чисел 4, 2, 1. Поскольку в системе генерации числовых последовательностей (2) генерация сиракузских последовательностей является частным случаем, допустимо предположить, что и для значений делителя больше двух генерируются последовательности, для которых мера уменьшения элементов последовательности больше меры их увеличения.

Для сиракузских последовательностей, если элемент — четное число, то оно уменьшается в 2 раза, а нечетное после преобразования к делимости и последующего деления увеличивается практически в 1,5 раза. Такая мера увеличения является самой большой по сравнению с последовательностями с большим значением делителя и ближе всего к мере уменьшения. В соответствии с (2) после приведения к делимости и последующего деления элемент последовательности принимает значение примерно $n + n/d$, и с увеличением d мера увеличения становится все меньше.

При использовании $d = 2$ единственное значение, которое может принять элемент последовательности меньше делителя, это единица, что является и завершением последовательности, и началом единственного бесконечного цикла 1, 4, 2, 1. Другая картина наблюдается при использовании относительно больших значений делителя. Были выполнены экспериментальные вычисления в соответствии с (2) для ряда значений делителя от 1000 до 1010 и при варьировании начальных значений n от 1 до 1 млрд. Во всех случаях числовые последовательности заканчиваются значением единицы с последующим бесконечным циклом возврата к единице, подобно сиракузским последовательностям. Ниже представлен числовой ряд с параметрами $d = 1001$ и $n = 1028$ в соответствии с (3) в сокращенном варианте

$$1028, 1030, 1032, 1034, \ldots, 1996, 1998, 2000, 2002, 2, 3, 4, 5, \ldots, 1001, 1.$$

Для достижения единицы потребовалось 1488 шагов, а наибольшее значение равно 2002. Такая последовательность подобна сиракузской только тем, что завершается единицей. В начале ряда элементы монотонно возрастают на две единицы, достигая кратного делителю значения 2002, и на следующем шаге после деления получаем значение 2, на что потребовалось 489 шагов из их общего количества 1488. В соответствии с алгоритмом (3) с любого значения элемента, меньшего делителя, с каждым шагом они увеличиваются на единицу до значения делителя, и на следующем шаге ряд завершается значением единицы. Если использовать терминологию работы [1], то можно сказать, что при использовании больших значений делителя у числа-градины не наблюдается головокружительных взлетов, а имеют место только головокружительные падения.

У сиракузских последовательностей в явном виде не проявляется важная особенность алгоритма в соответствии с (2), а именно то, что при любом значении текущего элемента последовательности, меньшего делителя, после его преобразования к делимости и последующего деления происходит увеличение на единицу и гарантированно достигается значение, равное делителю, с последующим получением единицы как завершение ряда натуральных чисел и началом единственного бесконечного цикла возврата к единице. Например, при использовании $d = 1001$ для значений текущего элемента от 2 до 1000 последовательность гарантированно будет завершаться единицей.

Для ряда делителей, представленных выше, устойчиво генерируются последовательности, заканчивающиеся единицей при варьировании начальных значений n до 1 млрд. Для делителей 5, 7 и 8 были продолжены вычисления при варьировании начальных значений до 100 млрд. И в этом диапазоне во всех случаях успешно генерировались последовательности, подобные сиракузским. Как и в случае гипотезы Коллатца, возникает желание в продолжении вычислений до ее опровержения, но этого не происходит, что как не опровергает, так и не доказывает гипотезу. Так и для делителей 5, 7 и 8 выборочно были дополнительно выполнены вычисления в диапазоне от 12-разрядных до 16-разрядных значений n в интервале одного млрд. значений, например для 16-разрядных значений интервал составил от 1234567812345678 до 12345688132345678 и в аналогичном формате для других разрядностей. Во всех случаях генерировались последовательности, подобные сиракузским. Такие результаты расчетов дают основание для предположения, что для ряда делителей, включая $d = 2$, в соответствии с алгоритмом (2) создаются особые условия или, другими словами, особые пропорции генерации значений n, при которых исключается возможность повторного появления одинаковых значений как причины зацикливания до завершения ряда значением единицы. Сохранение особых пропорций генерации значений элементов последовательности при любом начальном значении натурального числа – вопрос математического доказательства.

Экспериментальные вычисления в соответствии с (2) позволяют сделать ряд выводов:

1. Для любого натурального делителя можно получать числовые последовательности, завершающиеся значением единицы.

2. Для ряда делителей при определенных начальных значениях происходит зацикливание до достижения единицы, и такие ряды не могут считаться подобными сиракузским.

3. Для ряда делителей в проверенном диапазоне начальных значений n ряд натуральных чисел всегда заканчивается значением единицы, и их можно считать подобными сиракузским последовательностям.

В соответствии с полученными результатами представляется возможность формулирования множества гипотез, подобных гипотезе Коллатца, отличающихся только значениями натурального делителя. В данной ситуации возможно допустить, что для их доказательства, включая и гипотезу Коллатца, может использоваться единый подход. Если признать достоверным утверждение, что при формировании числовых рядов в соответствии с (2) мера их уменьшения больше меры увеличения, то единственным препятствием получения числовых рядов, подобных сиракузским, становится повторная генерация одинакового значения как причина зацикливания до получения единицы.

Приведем пример одной из возможных формулировок гипотезы Коллатца:

Любое натуральное число, если оно четное, нужно разделить на 2, *а если нечетное, то умножить на* 3 *и прибавить* 1, *и так повторять последовательно, в итоге последовательность всегда достигнет числа* 1.

Формулировку гипотезы Коллатца можно представить в соответствии с индуктивным/дедуктивным подходом как частный случай и привести примеры формулировок гипотез других частных случаев.

Гипотеза d5. *Любое натуральное число, если оно кратно* 5, *нужно разделить на* 5, *а если нет, то умножить на* 6 *и прибавить дополнение до значения* 5 *остатка от целочисленного деления этого числа на* 5, *и так повторять последовательно, в итоге последовательность всегда достигнет числа* 1.

Гипотеза d7. *Любое натуральное число, если оно кратно* 7, *нужно разделить на* 7, *а если нет, то умножить на* 8 *и прибавить дополнение до значения* 7 *остатка от целочисленного деления этого числа на* 7, *и так повторять последовательно, в итоге последовательность всегда достигнет числа* 1.

Гипотеза d8. *Любое натуральное число, если оно кратно* 8, *нужно разделить на* 8, *а если нет, то умножить на* 9 *и прибавить дополнение до значения* 8 *остатка от целочисленного деления этого числа на* 8, *и так повторять последовательно, в итоге последовательность всегда достигнет числа* 1.

На основании представленных частных случаев в соответствии с индуктивным подходом можно сформулировать гипотезу для общего случая:

Гипотеза d. *Для любого натурального числа имеется неограниченный ряд натуральных значений делителей d:* 2, 5, 7, 8, 13, 18, 19, 21, 22, 26, 28, 30, 32..47 *и т. д., для каждого из которых, если число кратно d, его нужно разделить на d, а если нет, то умножить на $d+1$ и прибавить дополнение до значения d остатка от целочисленного деления этого числа на d, в итоге последовательность всегда достигнет числа* 1.

По месту публикации гипотезы Коллатца формируемые ряды натуральных чисел в соответствии с гипотезой получили название *сиракузские*. Вполне логично, придерживаясь этого правила, формируемые ряды натуральных чисел в соответствии с гипотезой общего случая называть *ивановскими*.

Вычисление элементов последовательностей в соответствии с (2) предельно простое и зависит от двух параметров — начального значения n и делителя d. Предстоит доказать, для каких значений делителя исключается возможность генерации одинаковых значений элементов ряда до получения единицы.

Библиографический список

1. *Хэйес Б.* Взлеты и падения чисел-градин // В мире науки. 1984. № 3. С. 102–107.
2. *Чечулин В. Л.* О вероятностном подходе к доказательству сходимости к циклу сиракузской последовательности // Вестник Пермского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 4 (43). С. 11–15.
3. *Lagarias J. C.* The $3x+1$ problem and its generalizations // Amer. Math. Monthly. 1985. Vol. 92. P. 3–23.

Информация об авторе / Information about the author

Гончаренко Валерий Евстафиевич – кандидат технических наук, доцент Ивановского филиала ФГБОУ ВО РЭУ им. Г. В. Плеханова, г. Иваново, Россия, V_E_G_A@mail.ru

Goncharenko Valery Evstafievich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Ivanovo Branch of the Plekhanov Russian University of Economics, Ivanovo, Russia, V_E_G_A@mail.ru