

Централизаторная размерность обобщенных групп Баумслага–Солитера

Дудкин Ф.А.

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Иваново, 23 марта 2018

Конечно порожденная группа G называется *обобщенной группой Баумслага–Солитера* (GBS группой) если G действует на дереве так, что стабилизаторы вершин и ребер бесконечные циклические.

Тогда, по теореме Басса-Серра, группа G изоморфна $\pi_1(\mathbb{A})$ – фундаментальной группе некоторого графа групп $\mathbb{A}$, вершинные и реберные группы которого бесконечные циклические.

Конечно порожденная группа G называется *обобщенной группой Баумслага–Солитера* (*GBS группой*) если G действует на дереве так, что стабилизаторы вершин и ребер бесконечные циклические.

Тогда, по теореме Басса-Серра, группа G изоморфна $\pi_1(\mathbb{A})$ – фундаментальной группе некоторого графа групп $\mathbb{A}$, вершинные и реберные группы которого бесконечные циклические.

Поэтому GBS группа может быть представлена графом с метками $\mathbb{A} = (A, \lambda)$, где

A конечный связный граф, петли и кратные ребра допустимы (мультиграф).

$\lambda: E(A) \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ метки на ребрах графа A .

Поэтому GBS группа может быть представлена графом с метками $\mathbb{A} = (A, \lambda)$, где

A конечный связный граф, петли и кратные ребра допустимы (мультиграф).

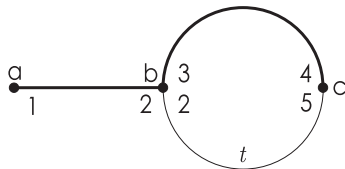
$\lambda: E(A) \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ метки на ребрах графа A .

Поэтому GBS группа может быть представлена графом с метками $\mathbb{A} = (A, \lambda)$, где

A конечный связный граф, петли и кратные ребра допустимы (мультиграф).

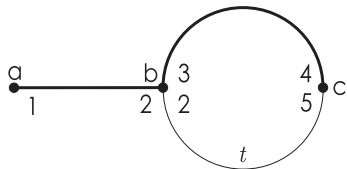
$\lambda: E(A) \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ метки на ребрах графа A .

Фундаментальная группа графа с метками, примеры



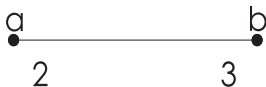
$$\pi_1(\mathbb{A}) = \langle a, b, c, t \mid a = b^2, b^3 = c^4, t^{-1}b^2t = c^5 \rangle \cong \\ \langle b, c, t \mid b^3 = c^4, t^{-1}b^2t = c^5 \rangle$$

Фундаментальная группа графа с метками, примеры



$$\pi_1(\mathbb{A}) = \langle a, b, c, t \mid a = b^2, b^3 = c^4, t^{-1}b^2t = c^5 \rangle \cong \\ \langle b, c, t \mid b^3 = c^4, t^{-1}b^2t = c^5 \rangle$$

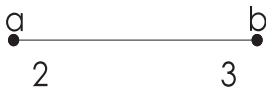
Фундаментальная группа графа с метками, примеры



Группа узла трилистника

$$\pi_1(\mathbb{A}) = \langle a, b | a^2 = b^3 \rangle$$

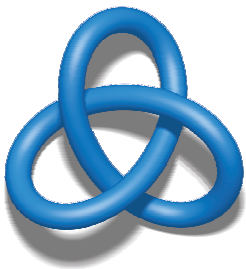
Фундаментальная группа графа с метками, примеры



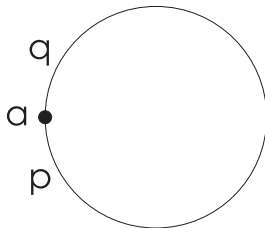
Группа узла трилистника

$$\pi_1(\mathbb{A}) = \langle a, b | a^2 = b^3 \rangle$$

Фундаментальная группа графа с метками, примеры



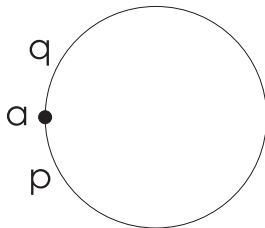
Фундаментальная группа графа с метками, примеры



Группы Баумслага-Солитера

$$\pi_1(\mathbb{A}) = BS(p, q) = \langle a, t \mid t^{-1}a^p t = a^q \rangle$$

Фундаментальная группа графа с метками, примеры



Группы Баумслага-Солитера

$$\pi_1(\mathbb{A}) = BS(p, q) = \langle a, t \mid t^{-1}a^p t = a^q \rangle$$

Как заметил D.Robinson *GBS* группы занимают центральные позиции в комбинаторной теории групп благодаря следующим свойствам:

- нециклические *GBS* группы – в точности такие конечно порожденные группы когомологической размерности 2, которые имеют соизмеримую бесконечную циклическую группу;
- *GBS* группы когерентны (т.е. все конечно порожденные подгруппы допускают конечное копредставление).

Как заметил D.Robinson GBS группы занимают центральные позиции в комбинаторной теории групп благодаря следующим свойствам:

- нециклические GBS группы – в точности такие конечно порожденные группы когомологической размерности 2, которые имеют соизмеримую бесконечную циклическую группу;
- GBS группы когерентны (т.е. все конечно порожденные подгруппы допускают конечное копредставление).

Как заметил D.Robinson GBS группы занимают центральные позиции в комбинаторной теории групп благодаря следующим свойствам:

- нециклические GBS группы – в точности такие конечно порожденные группы кохомологической размерности 2, которые имеют соизмеримую бесконечную циклическую группу;
- GBS группы когерентны (т.е. все конечно порожденные подгруппы допускают конечное копредставление).

GBS группы являются важным примером *JSJ* разложений. *JSJ* разложения впервые появились в работах о 3-многообразиях Jaco, Shalen и Johansson в 1979 году.

Эти топологические идеи были перенесены в теорию групп в работах Z. Sela и др. в 90-х.

Если G – конечно порожденная группа и $\mathcal{A}$ класс групп (циклические, абелевы и т.д.), то расщепление группы G над классом $\mathcal{A}$ (т.е. представление G в виде фундаментальной группы графа групп над $\mathcal{A}$ с некоторыми условиями) называется *JSJ* разложением группы G .

GBS группы являются важным примером *JSJ* разложений. *JSJ* разложения впервые появились в работах о 3-многообразиях Jaco, Shalen и Johansson в 1979 году.

Эти топологические идеи были перенесены в теорию групп в работах Z. Sela и др. в 90-х.

Если G – конечно порожденная группа и $\mathcal{A}$ класс групп (циклические, абелевы и т.д.), то расщепление группы G над классом $\mathcal{A}$ (т.е. представление G в виде фундаментальной группы графа групп над $\mathcal{A}$ с некоторыми условиями) называется *JSJ* разложением группы G .

GBS группы являются важным примером *JSJ* разложений. *JSJ* разложения впервые появились в работах о 3-многообразиях Jaco, Shalen и Johansson в 1979 году.

Эти топологические идеи были перенесены в теорию групп в работах Z. Sela и др. в 90-х.

Если G – конечно порожденная группа и $\mathcal{A}$ класс групп (циклические, абелевы и т.д.), то расщепление группы G над классом $\mathcal{A}$ (т.е. представление G в виде фундаментальной группы графа групп над $\mathcal{A}$ с некоторыми условиями) называется *JSJ* разложением группы G .

Проблема изоморфизма

Основная сложность при изучении GBS групп состоит в том, что одна группа может быть представлена бесконечным количеством графов с метками.

Проблема изоморфизма для GBS групп: определить алгоритмически когда для двух данных графов с метками их фундаментальные группы изоморфны.

Проблема изоморфизма

Основная сложность при изучении *GBS* групп состоит в том, что одна группа может быть представлена бесконечным количеством графов с метками.

Проблема изоморфизма для *GBS* групп: определить алгоритмически когда для двух данных графов с метками их фундаментальные группы изоморфны.

Изучением GBS групп в разное время занимались:

- M. Clay, M. Forester, G. Levitt (2005-2013) проблема изоморфизма, ранг и т.д.;
- A.L. Delgado, D.J.S. Robinson, M. Timm (2011-2015) структурные свойства и группы 3-многообразий;
- J. Taback, P. Wong (2011-2015) классы скрученной сопряженности и квазиизометрические инварианты GBS групп;

Изучением GBS групп в разное время занимались:

- М. Clay, М. Forester, G. Levitt (2005-2013) проблема изоморфизма, ранг и т.д.;
- A.L. Delgado, D.J.S. Robinson, M. Timm (2011-2015) структурные свойства и группы 3-многообразий;
- J. Taback, P. Wong (2011-2015) классы скрученной сопряженности и квазиизометрические инварианты GBS групп;

Изучением GBS групп в разное время занимались:

- M. Clay, M. Forester, G. Levitt (2005-2013) проблема изоморфизма, ранг и т.д.;
- A.L. Delgado, D.J.S. Robinson, M. Timm (2011-2015) структурные свойства и группы 3-многообразий;
- J. Taback, P. Wong (2011-2015) классы скрученной сопряженности и квазиизометрические инварианты GBS групп;

Изучением GBS групп в разное время занимались:

- M. Clay, M. Forester, G. Levitt (2005-2013) проблема изоморфизма, ранг и т.д.;
- A.L. Delgado, D.J.S. Robinson, M. Timm (2011-2015) структурные свойства и группы 3-многообразий;
- J. Taback, P. Wong (2011-2015) классы скрученной сопряженности и квазиизометрические инварианты GBS групп;

Централизаторная размерность

Если в группе G существует строго убывающая цепочка централизаторов

$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_d$$

длины d , но не существует такой цепочки длины $d + 1$, то *централизаторная размерность* $cdim(G)$ равна d . Если такого числа d не существует, то полагают $cdim(G) = \infty$.

Понятие централизаторной размерности предложили А.Мясников и П.Шумяцкий в 2004 году.

Централизаторная размерность

Если в группе G существует строго убывающая цепочка централизаторов

$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_d$$

длины d , но не существует такой цепочки длины $d + 1$, то *централизаторная размерность* $cdim(G)$ равна d . Если такого числа d не существует, то полагают $cdim(G) = \infty$.

Понятие централизаторной размерности предложили А.Мясников и П.Шумяцкий в 2004 году.

Условие минимальности централизаторов

Группа G обладает условием *минимальности централизаторов*, если всякая цепочка строго вложенных централизаторов конечна.

Если $cdim(G) < \infty$, то группа G удовлетворяет условию минимальности централизаторов. Обратное не верно.

Утверждение " G не удовлетворяет условию минимальности централизаторов" сильнее, чем " $cdim(G) = \infty$ ".

Условие минимальности централизаторов

Группа G обладает условием *минимальности централизаторов*, если всякая цепочка строго вложенных централизаторов конечна.

Если $cdim(G) < \infty$, то группа G удовлетворяет условию минимальности централизаторов. Обратное не верно.

Утверждение " G не удовлетворяет условию минимальности централизаторов" сильнее, чем " $cdim(G) = \infty$ ".

Условие минимальности централизаторов

Группа G обладает условием *минимальности централизаторов*, если всякая цепочка строго вложенных централизаторов конечна.

Если $cdim(G) < \infty$, то группа G удовлетворяет условию минимальности централизаторов. Обратное не верно.

Утверждение " G не удовлетворяет условию минимальности централизаторов" сильнее, чем " $cdim(G) = \infty$ ".

А. Дункан, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников (2006):

- централизаторная размерность совпадает с высотой решетки централизаторов;
- группы с конечной централизаторной размерностью универсально аксиоматизируемы;
- описали поведение централизаторной размерности относительно групповых операций.

А. Дункан, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников (2006):

- централизаторная размерность совпадает с высотой решетки централизаторов;
- группы с конечной централизаторной размерностью универсально аксиоматизируемы;
- описали поведение централизаторной размерности относительно групповых операций.

А. Дункан, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников (2006):

- централизаторная размерность совпадает с высотой решетки централизаторов;
- группы с конечной централизаторной размерностью универсально аксиоматизируемы;
- описали поведение централизаторной размерности относительно групповых операций.

А. Дункан, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников (2006):

- централизаторная размерность совпадает с высотой решетки централизаторов;
- группы с конечной централизаторной размерностью универсально аксиоматизируемы;
- описали поведение централизаторной размерности относительно групповых операций.

Е. И. Тимошенко (2013-2016) исследовал централизаторные размерности частично коммутативных метабелевых групп.

А. А. Бутурлакин, А. В. Васильев, Д. О. Ревин (2013, 2017) решили проблему Боровика-Хухро о строении локально конечных групп конечной s -размерности.

Е. И. Тимошенко (2013-2016) исследовал централизаторные размерности частично коммутативных метабелевых групп.

А. А. Бутурлакин, А. В. Васильев, Д. О. Ревин (2013, 2017) решили проблему Боровика-Хухро о строении локально конечных групп конечной s -размерности.

Модулярный гомоморфизм

Пусть $a \in G$ нетривиальный порождающий 1 типа. Тогда всякий $g \in G$ удовлетворяет соотношению

$$g^{-1} \cdot a^r \cdot g = a^s$$

в G для подходящих, зависящих от g целых чисел r и s .

Отображение

$$\Delta: g \rightarrow \frac{s}{r}$$

является гомоморфизмом $\Delta: G \rightarrow \mathbb{Q}^*$, который называется *модулярным гомоморфизмом*.

Модулярный гомоморфизм

Пусть $a \in G$ нетривиальный порождающий 1 типа. Тогда всякий $g \in G$ удовлетворяет соотношению

$$g^{-1} \cdot a^r \cdot g = a^s$$

в G для подходящих, зависящих от g целых чисел r и s .

Отображение

$$\Delta: g \rightarrow \frac{s}{r}$$

является гомоморфизмом $\Delta: G \rightarrow \mathbb{Q}^*$, который называется *модулярным гомоморфизмом*.

Теорема 1 Пусть G GBS группа. Если $\Delta(G) \not\subseteq \{\pm 1\}$, то либо $G \cong BS(1, n)$ и $\text{cdim}(G) = 3$, либо G не удовлетворяет условию минимальности централизаторов.

Теорема 2 Пусть $\mathbb{A}$ граф с метками, $\pi_1(\mathbb{A}) = G$ неабелева GBS группа. Если $\Delta(G) = \{1\}$, тогда $3 \leq \text{cdim}(G) \leq 2 \cdot |E(\mathbb{A})| + 1$ и $\text{cdim}(G)$ нечётна. Для любого нечётного $3 \leq k \leq 2 \cdot n + 1$ существует такой граф с метками $\mathbb{B}$ с n ребрами, что $\text{cdim}(\pi_1(\mathbb{B})) = k$ и $\Delta(\pi_1(\mathbb{B})) = \{1\}$.

Теорема 1 Пусть G GBS группа. Если $\Delta(G) \not\subseteq \{\pm 1\}$, то либо $G \cong BS(1, n)$ и $\text{cdim}(G) = 3$, либо G не удовлетворяет условию минимальности централизаторов.

Теорема 2 Пусть $\mathbb{A}$ граф с метками, $\pi_1(\mathbb{A}) = G$ неабелева GBS группа. Если $\Delta(G) = \{1\}$, тогда $3 \leq \text{cdim}(G) \leq 2 \cdot |E(\mathbb{A})| + 1$ и $\text{cdim}(G)$ нечётна. Для любого нечётного $3 \leq k \leq 2 \cdot n + 1$ существует такой граф с метками $\mathbb{B}$ с n ребрами, что $\text{cdim}(\pi_1(\mathbb{B})) = k$ и $\Delta(\pi_1(\mathbb{B})) = \{1\}$.

Теорема 3 Пусть $\mathbb{A}$ граф с метками, $\pi_1(\mathbb{A}) = G$. Если $\Delta(G) = \{\pm 1\}$, тогда $3 \leq \text{cdim}(G) \leq 2 \cdot |E(\mathbb{A})| + 3$ и $\text{cdim}(G)$ нечётна. Для любого нечётного $3 \leq k \leq 2 \cdot n + 3$ существует такой граф с метками $\mathbb{B}$ с n ребрами, что $\text{cdim}(\pi_1(\mathbb{B})) = k$ и $\Delta(\pi_1(\mathbb{B})) = \{\pm 1\}$.

Замечание 4 Пусть G GBS группа и $\Delta(G) \subseteq \{\pm 1\}$. Способ доказательства теорем 2, 3 дает алгоритм для вычисления $\text{cdim}(G)$ и построения решетки централизаторов G .

Теорема 3 Пусть $\mathbb{A}$ граф с метками, $\pi_1(\mathbb{A}) = G$. Если $\Delta(G) = \{\pm 1\}$, тогда $3 \leq \text{cdim}(G) \leq 2 \cdot |E(\mathbb{A})| + 3$ и $\text{cdim}(G)$ нечётна. Для любого нечётного $3 \leq k \leq 2 \cdot n + 3$ существует такой граф с метками $\mathbb{B}$ с n ребрами, что $\text{cdim}(\pi_1(\mathbb{B})) = k$ и $\Delta(\pi_1(\mathbb{B})) = \{\pm 1\}$.

Замечание 4 Пусть G GBS группа и $\Delta(G) \subseteq \{\pm 1\}$. Способ доказательства теорем 2, 3 дает алгоритм для вычисления $\text{cdim}(G)$ и построения решетки централизаторов G .

Устройство централизаторов, результаты

Пусть B связный подграф графа A , тогда $\pi_1(B)$ имеет циклический центр $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Среди всех связных подграфов с данным центром $\langle a \rangle$ выберем максимальный и обозначим его B_a .

Замечание 5 Пусть G GBS группа и $\Delta(G) = \{1\}$. Если A – конечный набор элементов группы G , то $C_G(A)$ сопряжен с одной из подгрупп

$$\langle r \rangle \times Z(\pi_1(B_a)),$$

$$\pi_1(B_b),$$

$$Z(\pi_1(B_c)).$$

Устройство централизаторов, результаты

Пусть B связный подграф графа A , тогда $\pi_1(\mathbb{B})$ имеет циклический центр $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Среди всех связных подграфов с данным центром $\langle a \rangle$ выберем максимальный и обозначим его B_a .

Замечание 5 Пусть G GBS группа и $\Delta(G) = \{1\}$. Если A – конечный набор элементов группы G , то $C_G(A)$ сопряжен с одной из подгрупп

$$\langle r \rangle \times Z(\pi_1(\mathbb{B}_a)),$$

$$\pi_1(\mathbb{B}_b),$$

$$Z(\pi_1(\mathbb{B}_c)).$$

Пусть B связный подграф графа A , тогда $\pi_1(\mathbb{B})$ имеет циклический центр $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Среди всех связных подграфов с данным центром $\langle a \rangle$ выберем максимальный и обозначим его B_a .

Замечание 5 Пусть G GBS группа и $\Delta(G) = \{1\}$. Если A – конечный набор элементов группы G , то $C_G(A)$ сопряжен с одной из подгрупп

$$\langle r \rangle \times Z(\pi_1(\mathbb{B}_a)),$$

$$\pi_1(\mathbb{B}_b),$$

$$Z(\pi_1(\mathbb{B}_c)).$$