Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2022. Том 63, № 6

УДК 512.543

О ПОЧТИ МОЩНОСТИ НЕКОТОРЫХ ГРУПП И СВОБОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Д. Н. Азаров

Аннотация. Получены условия почти мощности и почти π-мощности (где π — множество простых чисел) для некоторых HNN-расширений и обобщенных свободных произведений разрешимых минимаксных групп.

DOI 10.33048/smzh.2022.63.601

Ключевые слова: мощная группа, финитно аппроксимируемая группа, разрешимая минимаксная группа, HNN-расширение, группа Баумслага — Солитэра, обобщенное свободное произведение.

1. Введение

Напомним, что группа G называется *финитно аппроксимируемой*, если для любого неединичного элемента x группы G существует гомоморфизм группы G на конечную группу, при котором образ элемента x отличен от единицы. Здесь рассмотрены некоторые более тонкие аппроксимационные свойства групп, в том числе свойство мощности группы и его обобщения.

Элемент x группы G называется *мощным*, если либо порядок элемента x бесконечен и для любого целого положительного числа n существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий x в элемент порядка n; либо порядок элемента x конечен и для любого целого положительного n, делящего порядок x, существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий x в элемент порядка n.

Для элемента бесконечного порядка свойство «быть мощным» (без соответствующего термина) возникло в работе Стиба [1], где в качестве вспомогательного результата установлена мощность всех элементов в свободных группах и в конечно порожденных нильпотентных группах без кручения. В дальнейшем понятие мощного элемента изучалось рядом авторов и было распространено на элементы конечного порядка (см., например, [2, 3]).

Одним из обобщений этого понятия является понятие π-мощного элемента, где π — непустое множество простых чисел. Элемент x группы G называется *π-мощным*, если либо порядок элемента x бесконечен и для любого целого положительного π-числа n существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий x в элемент порядка n; либо порядок элемента x конечен и для любого целого положительного π-числа n, делящего порядок x, существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий x в элемент порядка n.

Элемент x группы G называется *слабо мощным* (*слабо π-мощным*), если порядок элемента x бесконечен и существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n (для любого целого положительного π-числа n) существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий элемент x в элемент порядка mn.

Группа G называется *мощной* (*π-мощной*), если каждый ее элемент является мощным (π-мощным).

Группа G называется *почти мощной* (*почти π-мощной*), если в ней существует подгруппа H конечного индекса, являющаяся мощной (π-мощной). В связи с этим определением напомним, что группа обладает каким-либо свойством почти, если она содержит подгруппу конечного индекса с данным свойством.

Группа G называется *слабо мощной* (*слабо π-мощной*), если она финитно аппроксимируема и все ее элементы бесконечного порядка являются слабо мощными (слабо π-мощными).

Если π — множество всех простых чисел, то понятия π-мощности, почти π-мощности и слабой π-мощности группы совпадают с понятиями мощности, почти мощности и слабой мощности соответственно. Заметим еще, что любая мощная (почти мощная, слабо мощная) группа является π-мощной (почти π-мощной, слабо π-мощной) для любого множества π простых чисел.

Заметим, что все π-мощные, почти π-мощные и слабо π-мощные группы финитно аппроксимируемы.

Изучение поведения свойства группы «быть мощной» относительно свободных конструкций сталкивается с большими трудностями. Об этом свидетельствует, например, тот факт, что остается открытым вопрос о замкнутости класса всех мощных групп относительно свободных произведений («Коуровская тетрадь», вопрос 9.1). С другой стороны, результаты работ [4, 5] показывают, что свойство слабой мощности (слабой π-мощности) ведет себя достаточно «хорошо» относительно свободных конструкций — обобщенных свободных произведений и HNN-расширений. Однако большинство известных результатов о слабой мощности (слабой π-мощности) не удается распространить на почти мощность (почти π-мощность). Здесь получено несколько результатов о почти мощности и почти π-мощности для некоторых HNN-расширений и обобщенных свободных произведений.

Наиболее простыми примерами HNN-расширений являются группы Баумслага — Солитэра, т. е. группы

$$G(m,n) = (a, b; b^{-1}a^m b = a^n),$$

где m и n — ненулевые целые числа. Известный результат Баумслага и Солитэра [6] утверждает, что группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $|m| = 1$, или $|n| = 1$, или $|m| = |n|$. Здесь будет доказано следующее утверждение, дополняющее этот результат.

Теорема 1. *Если группа $G(m,n)$ финитно аппроксимируема, то она является или почти мощной, или π-мощной для некоторого множества π, состоящего из почти всех простых чисел. Более подробно, имеют место следующие два утверждения.*

1. *Группа $G(m,n)$ является почти мощной тогда и только тогда, когда $|m| = |n|$.*

2. *Если $|m| = 1$ или $|n| = 1$, то группа $G(m,n)$ является π-мощной, где π — множество всех простых чисел, взаимно простых с m и n.*

В связи с утверждением 1 теоремы 1 заметим, что условие $|m| = |n|$ равносильно слабой мощности группы $G(m,n)$ [4].

Как показывают простые примеры, многие финитно аппроксимируемые группы, не обладающие свойством мощности, тем не менее обладают этим свойством почти. Так, например, полициклические группы финитно аппроксимируемы [7], не обязаны быть мощными (даже при отсутствии кручения) [3], но, с другой стороны, любая полициклическая группа почти мощная (см., например, сформулированное ниже следствие 2.1).

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой минимаксной группы. В отличие от полициклических групп, разрешимые минимаксные группы не обязаны быть финитно аппроксимируемыми, а финитно аппроксимируемые разрешимые минимаксные группы не обязаны быть почти мощными. Известно, что разрешимая минимаксная группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована (см., например, [8, п. 5.3.2]). Для разрешимой минимаксной группы условие редуцированности состоит в том, что она не содержит квазициклических подгрупп. Для таких групп здесь доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть G — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа, π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G.*

Тогда группа G содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными в группе G, и потому G — почти π-мощная и слабо π-мощная группа.

Более подробно, в группе G существует характеристическая подгруппа H без кручения, имеющая конечный индекс в G и такая, что для любого неединичного элемента x подгруппы H и для любого целого положительного π-числа n в группе G существует характеристическая подгруппа W конечного индекса такая, что порядок элемента x по модулю подгруппы W равен n.

Слабая π-мощность группы G из теоремы 2 установлена в [5].

В связи с формулировкой теоремы 2 напомним, что в любой почти разрешимой минимаксной группе G существует субнормальный ряд, каждый фактор которого является либо квазициклической группой, либо бесконечной циклической группой, либо конечной группой [8, п. 5.1.6]. *Спектром* почти разрешимой минимаксной группы G называется множество всех простых p, для которых соответствующая квазициклическая группа присутствует среди членов упомянутого выше ряда.

Так как любая полициклическая группа финитно аппроксимируема и ее спектр пуст, из теоремы 2 вытекает

Следствие 2.1. *Любая почти полициклическая группа является почти мощной и слабо мощной.*

Примерами финитно аппроксимируемых разрешимых минимаксных групп, не являющихся полициклическими, служат группы Баумслага — Солитэра $G(1,n)$, где $n > 1$. Спектр группы $G(1,n)$ совпадает с множеством всех простых делителей числа n. Поэтому в силу теоремы 2 группа $G(1,n)$ почти π-мощная, где π — множество всех простых чисел, не делящих n, причем слово «почти» здесь является излишним в силу теоремы 1.

Перейдем к HNN-расширениям групп. Пусть G — группа, H и K — подгруппы группы G, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K, и пусть

$$G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K)$$

— HNN-расширение группы G с подгруппами H и K, связанными относительно изоморфизма φ. Если хотя бы одна из связанных подгрупп H или K совпадает с группой G, то G^* называется *нисходящим* HNN-*расширением* группы G.

Основной результат настоящей работы формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Пусть G — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа, π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G, и пусть G^* —* HNN-*расширение группы G со связанными подгруппами H и K, причем H и K имеют конечные индексы в G.*

Если $H \neq G$ и $K \neq G$, то следующие утверждения равносильны между собой.

1. Группа G^* финитно аппроксимируема.

2. В группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*.

3. Группа G^* содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G^*.

4. Группа G^* почти π-мощная.

5. Группа G^* слабо π-мощная.

Если $H = G$ или $K = G$, то группа G^* содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой являются π_1-мощными в группе G^*, и потому группа G^* почти π_1-мощная и слабо π_1-мощная, где π_1 — подмножество множества π, состоящее из почти всех простых чисел.

Следствие 3.1. *Пусть G — почти полициклическая группа, G^* — HNN-расширение группы G со связанными подгруппами H и K, причем H и K являются подгруппами конечных индексов группы G.*

Если $H \neq G$ и $K \neq G$, то для группы G^* свойства финитной аппроксимируемости, почти мощности и слабой мощности равносильны между собой.

Если $H = G$ или $K = G$, то группа G^* почти π_1-мощная и слабо π_1-мощная, где π_1 — множество, состоящее из почти всех простых чисел.

Второе утверждение следствия 3.1 усиливает доказанную в [9] теорему о финитной аппроксимируемости произвольного нисходящего HNN-расширения почти полициклической группы.

Аналог теоремы 3 для обобщенных свободных произведений формулируется следующим образом.

Теорема 4. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых минимаксных групп A и B с объединенной подгруппой H, имеющей конечный индекс в каждой из групп A и B, причем $H \neq A$ и $H \neq B$, и пусть π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы H.*

Тогда следующие утверждения равносильны между собой.

1. Группа G финитно аппроксимируема.

2. В группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G.

3. Группа G содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G.

4. Группа G почти π-мощная.

5. Группа G слабо π-мощная.

Следствие 4.1. *Пусть $G = (A*B; H)$ — свободное произведение почти полициклических групп A и B с объединенной подгруппой H, имеющей конечный индекс в каждой из групп A и B, причем $H \neq A$ и $H \neq B$.*

Тогда для группы G свойства финитной аппроксимируемости, почти мощности и слабой мощности равносильны между собой.

Среди всех результатов настоящей работы следующая теорема имеет наиболее объемное доказательство.

Теорема 5. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых минимаксных групп A и B с объединенной подгруппой H, нормальной в каждой из групп A и B, причем $H \neq A$ и $H \neq B$, и пусть π — множество всех простых чисел, не принадлежащих объединению спектров групп A и B.*

Тогда следующие утверждения равносильны между собой.

1. *Группа G финитно аппроксимируема.*
2. *Фактор-группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы.*
3. *Группа G содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G.*
4. *Группа G почти π-мощная.*
5. *Группа G слабо π-мощная.*

Следствие 5.1. *Свободное произведение двух почти полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой является почти мощной и слабо мощной группой.*

Это утверждение усиливает классический результат Баумслага, утверждающий финитную аппроксимируемость произвольного свободного произведения двух полициклических групп с нормальным объединением [10].

2. Доказательство теоремы 2

Пусть G — произвольная группа, n — целое положительное число. Через G^n, как обычно, будем обозначать степенную подгруппу, т. е. подгруппу группы G, порожденную n-ми степенями всех ее элементов. Если G — абелева группа, то G^n совпадает с множеством n-х степеней всех ее элементов. Если G — почти разрешимая минимаксная группа, то G^n, как легко видеть, имеет конечный индекс в G.

Лемма 1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, A — абелева группа без кручения, не содержащая подгрупп изоморфных группе Q_p p-ичных дробей ни для какого p из π, и пусть $X = (x)$ — неединичная циклическая подгруппа группы A.*

Тогда для любого целого положительного π-числа n существует целое положительное π-число k такое, что $X \cap A^k = X^n$.

Это утверждение легко проверяется (см., например, [5, лемма 1]).

Лемма 2. *Пусть G — бесконечная финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа. Тогда в группе G существует характеристическая подгруппа $A \neq 1$, удовлетворяющая следующим условиям.*

1. *Подгруппа A является абелевой группой без кручения.*
2. *Фактор-группа G/A финитно аппроксимируема.*

Доказательство. По условию в группе G существует разрешимая минимаксная подгруппа H конечного индекса. Так как H содержит в себе некоторую степенную подгруппу группы G и все степенные подгруппы группы G являются характеристическими подгруппами конечных индексов, можно считать, что H — характеристическая разрешимая минимаксная подгруппа конечного индекса группы G.

Пусть $\tau(H)$ — периодический радикал группы H, т. е. наибольшая нормальная периодическая подгруппа. Тогда $\tau(H)$ — разрешимая группа с условием минимальности, т. е. конечное расширение прямого произведения конечного (или нулевого) числа квазициклических групп. С другой стороны, группа G финитно аппроксимируема, и поэтому она (а значит, и $\tau(H)$) не содержит квазициклических подгрупп. Следовательно, $\tau(H)$ — конечная подгруппа. Отсюда и из финитной аппроксимируемости группы G следует, что в G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $N \cap \tau(H) = 1$, причем можно вдобавок считать, что N характеристична в G.

Из свойств подгрупп H и N следует, что подгруппа $S = H \cap N$ является характеристической разрешимой минимаксной подгруппой конечного индекса группы G и $S \cap \tau(H) = 1$. Отсюда и из того, что $\tau(S) \subseteq \tau(H)$, следует, что $\tau(S) = 1$.

По теореме А. И. Мальцева [8, п. 5.2.1] в фактор-группе произвольной разрешимой группы конечного ранга по ее периодическому радикалу существует характеристический ряд, все бесконечные факторы которого являются абелевыми группами без кручения конечного ранга. Так как разрешимая минимаксная группа S имеет конечный ранг и $\tau(S) = 1$, такой ряд существует и в группе S. Получаем, таким образом, характеристический ряд группы G: $G \geq S = S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_r = 1$, в котором все бесконечные факторы являются абелевыми группами без кручения конечного ранга.

Можно, разумеется, считать, что $S_{r-1} \neq 1$. Обозначим подгруппу S_{r-1} через A. Тогда A — характеристическая подгруппа группы G и $A \neq 1$. Покажем, что подгруппа $A = S_{r-1}$ искомая, т. е. что для нее выполняются условия 1 и 2 из формулировки леммы 2.

Группа A изоморфна одному из факторов ряда $G \geq S = S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_r = 1$ и поэтому она является либо конечной группой, либо абелевой группой без кручения. Если предположить, что группа A конечна, то она содержится в $\tau(S)$, что невозможно, так как $A \neq 1$ и $\tau(S) = 1$. Поэтому A — абелева группа без кручения, т. е. выполняется условие 1.

Так как любой фактор ряда $G \geq S = S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_r = 1$ либо конечен, либо не имеет кручения, то фактор-группа G/S_{r-1} не содержит квазициклических подгрупп и поэтому финитно аппроксимируема (см., например, [8, п. 5.3.2]). Таким образом, для подгруппы $A = S_{r-1}$ выполняется условие 2. Лемма доказана.

Теперь докажем теорему 2. Так как первое утверждение из формулировки теоремы 2 является непосредственным следствием второго утверждения, в доказательстве нуждается только второе утверждение, справедливость которого обеспечивается следующей леммой.

Лемма 3. *Пусть G — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа, π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G.*

Тогда в группе G существует характеристическая подгруппа H без кручения, имеющая конечный индекс в G и такая, что для любого неединичного элемента x подгруппы H и для любого целого положительного π-числа n в группе

G существует характеристическая подгруппа W конечного индекса такая, что порядок элемента x по модулю подгруппы W равен n.

Доказательство. Так как G — почти разрешимая минимаксная группа, в ней существует субнормальный ряд, каждый фактор которого является либо конечной группой, либо бесконечной циклической группой, либо квазициклической группой. Число бесконечных циклических факторов такого ряда не зависит от выбора этого ряда, обозначается через $h(G)$ и называется *рангом Гирша* группы G. Доказательство леммы 3 проведем индукцией по $h(G)$.

Если $h(G) = 0$, то G почти черниковская, причем в ней нет квазициклических подгрупп, так как по условию группа G финитно аппроксимируема. Таким образом, если $h(G) = 0$, то G конечна и в этом случае в качестве искомой подгруппы H можно взять единичную подгруппу.

Предположим, что $h(G) > 0$. В этом случае G — бесконечная финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа. По лемме 2 в группе G существует характеристическая подгруппа $A \neq 1$, являющаяся абелевой группой без кручения и такая, что фактор-группа G/A финитно аппроксимируема. Очевидно, что группа G/A наследует от группы G свойства почти разрешимости и минимаксности.

Так как A — неединичная абелева группа без кручения, то $h(A) \neq 0$. Отсюда и из того, что ранг Гирша подчиняется закону сложения $h(G) = h(A) + h(G/A)$, следует, что $h(G/A) < h(G)$, причем, как отмечалось выше, G/A — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа.

Таким образом, к группе G/A применимо индуктивное предположение, в силу которого в группе G/A существует характеристическая подгруппа H/A конечного индекса, не имеющая кручения и такая, что для любого неединичного элемента xA группы H/A и для любого целого положительного π_1-числа n (где π_1 — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G/A) в группе G/A существует характеристическая подгруппа W/A конечного индекса, по модулю которой элемент xA имеет порядок n.

Это означает, что H — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G, не имеющая кручения, содержащая A и обладающая следующим свойством: для любого элемента x группы H, не принадлежащего A, и для любого целого положительного π_1-числа n в группе G существует характеристическая подгруппа W конечного индекса, содержащая A, по модулю которой элемент x имеет порядок n.

В этом свойстве множество π_1 можно заменить содержащимся в нем множеством π. Поэтому для доказательства леммы остается проверить аналогичное свойство в случае, когда $x \in A \setminus 1$: для любого неединичного элемента x группы A и для любого целого положительного π-числа n в группе G существует характеристическая подгруппа W конечного индекса такая, что $|xW| = n$.

Чтобы применить лемму 1 к группе A и к множеству π, нужно проверить, что A не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p ни для какого p из π. Если предположить, что для некоторого p из π подгруппа Q_p содержится в A, то спектр группы Q_p (состоящий из одного числа p) содержится в спектре группы A, который, в свою очередь, содержится в спектре группы G, что противоречит определению множества π.

Пусть x — неединичный элемент группы A, $X = (x)$ — циклическая подгруппа, порожденная элементом x, и пусть n — целое положительное π-число. По лемме 1 существует целое положительное π-число k такое, что $X \cap A^k = X^n$.

Это означает, что элемент xA^k группы G/A^k имеет порядок n.

Так как группа G/A финитно аппроксимируема, она не содержит квазициклических подгрупп. Очевидно, что и группа A/A^k не содержит квазициклических подгрупп. Из последних двух обстоятельств следует, что группа G/A^k не содержит квазициклических подгрупп и поэтому является финитно аппроксимируемой группой.

Таким образом, xA^k — элемент конечного порядка n финитно аппроксимируемой группы G/A^k. Поэтому в группе G/A^k найдется степенная подгруппа $(G/A^k)^l = G^lA^k/A^k$, по модулю которой порядок элемента xA^k равен n. Тогда порядок элемента x по модулю подгруппы $W = G^lA^k$ равен n, причем W — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G. Лемма доказана.

3. О расширениях с помощью почти свободных групп

Лемма 4. *Пусть G — конечно порожденная почти свободная группа, F — какая-нибудь нормальная свободная подгруппа конечного индекса группы G. Тогда все элементы из подгруппы F являются мощными элементами группы G.*

Это утверждение легко проверяется (см., например, [5, лемма 2]).

Лемма 5. *Пусть T — конечная нормальная подгруппа группы S и фактор-группа S/T почти свободна. Тогда группа S почти свободна.*

Доказательство. По условию в группе S/T существует свободная подгруппа U/T конечного индекса. Тогда группа U является расширением подгруппы T с помощью свободной группы. Известно, что любое расширение с помощью свободной группы расщепляемо. Поэтому группа U является расщепляемым расширением подгруппы T с помощью свободной подгруппы F. Отсюда и из конечности группы T следует, что F имеет конечный индекс в U. Подгруппа U, в свою очередь, имеет конечный индекс в S. Таким образом, F — свободная подгруппа конечного индекса группы S. Лемма доказана.

Докажем основной результат разд. 3.

Лемма 6. *Пусть L — нормальная подгруппа группы P, группа L финитно аппроксимируема, почти разрешима и минимаксна, а фактор-группа P/L конечно порождена и почти свободна. Тогда группа P содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой π-мощные в группе P, где π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы L.*

Доказательство. По лемме 3 в группе L существует характеристическая подгруппа U без кручения, имеющая конечный индекс в L и такая, что для любого неединичного элемента x группы U и для любого целого положительного π-числа n в группе L существует характеристическая подгруппа $W_{x,n}$ конечного индекса такая, что порядок элемента $xW_{x,n}$ равен n.

Так как U характеристична в L и L нормальна в P, то U нормальна в P. Фактор-группа P/U представляет собой расширение конечной группы L/U с помощью конечно порожденной почти свободной группы P/L. Поэтому в силу леммы 5 группа P/U почти свободна, и очевидно, что она конечно порождена. Пусть F/U — какая-нибудь нормальная свободная подгруппа конечного индекса группы P/U. Тогда по лемме 4 все элементы из подгруппы F/U являются мощными элементами группы P/U.

Очевидно, что F — подгруппа без кручения конечного индекса группы P. Покажем, что подгруппа F искомая, т. е. что любой неединичный элемент x группы F является π-мощным элементом группы P.

Рассмотрим сначала случай, когда $x \notin U$. Это означает, что порядок элемента xU бесконечен. Как уже отмечалось, все элементы из F/U (и, в частности, xU) являются мощными элементами группы P/U. Так как xU — мощный элемент бесконечного порядка группы P/U, то x — мощный элемент группы P и, в частности, x — π-мощный элемент группы P.

Рассмотрим теперь случай, когда $x \in U$. В этом случае по построению подгруппы U для любого целого положительного π-числа n в группе L существует характеристическая подгруппа $W_{x,n}$ конечного индекса такая, что порядок элемента $xW_{x,n}$ равен n. Так как $W_{x,n}$ характеристична в L и L нормальна в P, то $W_{x,n}$ нормальна в P. Фактор-группа $P/W_{x,n}$ представляет собой расширение конечной группы $L/W_{x,n}$ с помощью почти свободной группы P/L. Поэтому в силу леммы 5 группа $P/W_{x,n}$ почти свободна и, следовательно, она финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что порядок элемента $xW_{x,n}$ группы $P/W_{x,n}$ равен n, следует, что существует гомоморфизм группы $P/W_{x,n}$ на конечную группу, переводящий элемент $xW_{x,n}$ на элемент порядка n. Это означает, что элемент x π-мощный в P. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть P — HNN-расширение конечной группы G (обобщенное свободное произведение конечных групп A и B). Тогда группа P конечно порождена и почти свободна.*

Доказательство. Конечная порожденность группы P очевидна. Согласно [10, 11] группа P финитно аппроксимируема. Поэтому существует гомоморфизм группы P на конечную группу, инъективный на конечной подгруппе G (на конечных подгруппах A и B). Ядро F этого гомоморфизма является подгруппой конечного индекса в группе P. Так как F пересекается по единице со всеми подгруппами группы P, сопряженными с G (с A и B), по теореме Нейман (см., например, [12, с. 288]) подгруппа F свободная и поэтому P почти свободна. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 3

Лемма 8. *Пусть G — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа, π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G, и пусть G^* — HNN-расширение группы G со связанными подгруппами H и K, причем H и K — собственные подгруппы конечных индексов группы G.*

Если в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*, то группа G^* содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G^*.

Доказательство. Очевидно, что подгруппа L наследует от группы G свойства финитной аппроксимируемости, почти разрешимости и минимаксности. Так как L имеет конечный индекс в G, спектры групп G и L совпадают. Поэтому π совпадает с множеством всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы L.

Так как L — нормальная подгруппа группы G^* и $L \subseteq G$, с помощью леммы Бриттона (см., например, [12, с. 249]) легко проверяется, что $L \subseteq H \cap K$. Легко видеть также, что фактор-группа G^*/L является HNN-расширением группы G/L. Поскольку база G/L этого HNN-расширения конечна, в силу леммы 7 группа G^*/L является конечно порожденной почти свободной группой.

Таким образом, L — нормальная подгруппа группы G^*, группа L финитно аппроксимируема, почти разрешима и минимаксна, а фактор-группа G^*/L

конечно порождена и почти свободна. Поэтому в силу леммы 6 группа G^* содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой π-мощные в группе G^*. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть G — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа, π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G, и пусть G^* — нисходящее* HNN*-расширение группы G.*

Тогда группа G^* содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой π_1-мощные в группе G^*, где π_1 — некоторое подмножество множества π, состоящее из почти всех простых чисел.

Доказательство. Так как G — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа, ее нисходящее HNN-расширение G^* также является финитно аппроксимируемой почти разрешимой минимаксной группой [13]. Поэтому в силу теоремы 2 группа G^* содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой π_1-мощные в группе G^*, где π_1 — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G^*. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что спектр группы G содержится в спектре группы G^*, поэтому $\pi_1 \subseteq \pi$. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3.

Пусть G — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа, π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G, и пусть G^* — HNN-расширение группы G со связанными подгруппами H и K, причем H и K имеют конечные индексы в G.

Рассмотрим сначала случай, когда $H \neq G$ и $K \neq G$. Для этого случая доказываемая нами теорема утверждает, что следующие условия равносильны между собой.

1. Группа G^* финитно аппроксимируема.

2. В группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*.

3. Группа G^* содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G^*.

4. Группа G^* почти π-мощная.

5. Группа G^* слабо π-мощная.

Равносильность $1 \Longleftrightarrow 2$ установлена в [14]. Импликация $2 \Longrightarrow 3$ обеспечивается леммой 8. Импликации $3 \Longrightarrow 4$, $3 \Longrightarrow 5$, $4 \Longrightarrow 1$ и $5 \Longrightarrow 1$ очевидны.

Рассмотрим случай, когда $H = G$ или $K = G$. Для этого случая доказываемая теорема утверждает, что группа G^* содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой π_1-мощные в группе G^*, и потому группа G^* почти π_1-мощная и слабо π_1-мощная, где π_1 — подмножество множества π, состоящее из почти всех простых чисел. Справедливость этого утверждения обеспечивается леммой 9.

Теорема 3 доказана.

5. Доказательство теоремы 4

Лемма 10. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых минимаксных групп A и B с объединенной подгруппой H, имеющей конечный индекс в каждой из групп A и B, и пусть π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы H.*

Если в группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G, то группа G содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G.

Доказательство. Очевидно, что подгруппы L и H наследуют от групп A и B свойства финитной аппроксимируемости, почти разрешимости и минимаксности. Так как L имеет конечный индекс в H, спектры групп H и L совпадают. Поэтому π совпадает с множеством всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы L.

Легко видеть также, что фактор-группа G/L является свободным произведением групп A/L и B/L с объединением H/L. Так как свободные множители A/L и B/L этого свободного произведения конечны, в силу леммы 7 группа G/L является конечно порожденной почти свободной группой.

Таким образом, L — нормальная подгруппа группы G, группа L финитно аппроксимируема, почти разрешима и минимаксна, а фактор-группа G/L конечно порождена и почти свободна. Поэтому в силу леммы 6 группа G содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой π-мощные в группе G. Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 4, т. е. докажем, что для свободного произведения $G = (A * B; H)$ и для множества π из формулировки леммы 10 (при условии, что $H \neq A$ и $H \neq B$) следующие утверждения равносильны между собой.

1. Группа G финитно аппроксимируема.

2. В группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G.

3. Группа G содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G.

4. Группа G почти π-мощная.

5. Группа G слабо π-мощная.

Равносильность $1 \Longleftrightarrow 2$ установлена в [14]. Импликация $2 \Longrightarrow 3$ обеспечивается леммой 10. Импликации $3 \Longrightarrow 4$, $3 \Longrightarrow 5$, $4 \Longrightarrow 1$ и $5 \Longrightarrow 1$ очевидны. Теорема 4 доказана.

6. Доказательство теоремы 5

Лемма 11. *Пусть $G = A * B$ — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых минимаксных групп A и B, и пусть π — множество всех простых чисел, не принадлежащих объединению спектров групп A и B.*

Тогда группа G содержит подгруппу C без кручения конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G.

Доказательство. Обозначим через D декартову подгруппу группы G. Фактор-группа G/D изоморфна прямому произведению групп A и B. Поэтому G/D — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа. Очевидно, что множество π совпадает с множеством всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G/D. По теореме 2 в группе G/D существует нормальная подгруппа C/D без кручения конечного индекса, все элементы которой π-мощные в группе G/D.

Так как C/D и D — группы без кручения, то и C — группа без кручения. Покажем, что произвольный неединичный элемент x подгруппы C π-мощный в группе G.

Это очевидно в случае, когда $x \notin D$. В этом случае (ввиду отсутствия кручения в группе C/D) элемент xD имеет бесконечный порядок в группе G/D и является π-мощным элементом этой группы. Поэтому x является π-мощным элементом группы G.

Рассмотрим случай, когда $x \in D$. В этом случае элемент x имеет несократимую запись $x = x_1 x_2 \dots x_r$ длины $r > 1$. Без потери общности можно считать, что $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, $x_3 \in A, \dots$. В силу финитной аппроксимируемости групп A и B существуют нормальные подгруппы M и N конечных индексов групп A и B такие, что $x_1 \notin M$, $x_2 \notin N$, $x_3 \notin M, \dots$. Рассмотрим свободное произведение $G_{MN} = A/M * B/N$ конечных групп A/M и B/N, а также гомоморфизм $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/M$ и $B \to B/N$. Тогда элемент $x\rho_{MN}$ имеет в группе G_{MN} несократимую запись $x\rho_{MN} = x_1 M \cdot x_2 N \cdot x_3 M \dots$ длины $r > 1$, поэтому $x\rho_{MN} \neq 1$. Отсюда и из того, что x принадлежит декартовой подгруппе D группы G, следует, что $x\rho_{MN}$ — неединичный элемент декартовой подгруппы F группы G_{MN}, причем (как и любая декартова подгруппа) F является нормальной свободной подгруппой группы G_{MN} и ее индекс в G_{MN} конечен (так как $G_{MN}/F \cong A/M \times B/N$ — конечная группа). Поэтому в силу леммы 4 $x\rho_{MN}$ — мощный элемент (бесконечного порядка) группы G_{MN}. Отсюда следует, что x — мощный (и, в частности, π-мощный) элемент группы G. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение почти разрешимых минимаксных групп A и B с объединенной подгруппой H, нормальной в G, и пусть L — подгруппа конечного индекса группы H, нормальная в G.*

Если фактор-группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы, то и фактор-группа G/L финитно аппроксимируема.

Доказательство. Так как группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы, то они не содержат квазициклических подгрупп. Отсюда и из конечности группы H/L следует, что группы A/L и B/L также не содержат квазициклических подгрупп и потому финитно аппроксимируемы (см., например, [8, п. 5.3.2]). Группа G/L является свободным произведением финитно аппроксимируемых групп A/L и B/L с конечной объединенной подгруппой H/L. Известно [10], что такое свободное произведение финитно аппроксимируемо. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых минимаксных групп A и B с объединенной подгруппой H, нормальной в G, и пусть π — множество всех простых чисел, не принадлежащих объединению спектров групп A и B.*

Если фактор-группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы, то группа G содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G.

Доказательство. Группа G/H представляет собой свободное произведение финитно аппроксимируемых почти разрешимых минимаксных групп A/H и B/H. По лемме 11 группа G/H содержит подгруппу P/H без кручения конечного индекса, все элементы которой являются π_1-мощными элементами группы G/H, где π_1 — множество всех простых чисел, не принадлежащих объединению спектров групп A/H и B/H. Так как спектры групп A/H и B/H содержатся в спектрах групп A и B соответственно, то $\pi \subseteq \pi_1$. Поэтому все элементы из P/H π-мощные в G/H. В качестве промежуточного итога зафиксируем

Утверждение 1. *Подгруппа P является подгруппой конечного индекса группы G, содержащей H, фактор-группа P/H не имеет кручения, и все элементы из P/H являются π-мощными в G/H.*

Так как H — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа, по теореме 2 в H существует характеристическая подгруппа K без кручения, имеющая конечный индекс в H и такая, что для любого неединичного элемента x подгруппы K и для любого целого положительного π_2-числа n в группе H существует характеристическая подгруппа W конечного индекса такая, что порядок элемента x по модулю подгруппы W равен n, где π_2 — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы H.

Поскольку спектр группы H содержится в спектрах групп A и B, то $\pi \subseteq \pi_2$, поэтому для любого неединичного элемента $x \in K$ и для любого целого положительного π-числа n в группе H существует характеристическая подгруппа W конечного индекса такая, что $|xW| = n$. Так как K и W характеристичны в H и H нормальна в G, то K и W нормальны в G. По лемме 12 группа G/W финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что $|xW| = n$, следует, что существует гомоморфизм группы G/W на конечную группу, при котором порядок образа элемента xW равен n. Тем самым доказана π-мощность в группе G произвольного элемента $x \in K$. Получаем следующий промежуточный результат.

Утверждение 2. *Подгруппа K нормальна в группе G, является подгруппой конечного индекса в H, и все элементы из K π-мощные в G.*

По лемме 12 фактор-группа G/K финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что ее подгруппа H/K конечна, следует, что в группе G/K существует нормальная подгруппа Q/K конечного индекса, тривиально пересекающая H/K. Тогда Q — нормальная подгруппа конечного индекса группы G и $Q \cap H = K$.

Пусть $R = P \cap Q$. Так как P и Q — подгруппы конечных индексов группы G, то и R — подгруппа конечного индекса группы G. Для завершения доказательства леммы остается проверить π-мощность в группе G произвольного элемента $x \in R$.

Рассмотрим сначала случай, когда $x \notin H$. Так как $x \in R \subseteq P$, то xH — неединичный элемент группы P/H. Поэтому в силу утверждения 1 xH — π-мощный элемент бесконечного порядка группы G/H. Отсюда следует, что x — π-мощный элемент группы G.

Рассмотрим теперь случай, когда $x \in H$. Так как $x \in R \subseteq Q$, то $x \in Q \cap H = K$. Поэтому в силу утверждения 2 x — π-мощный элемент группы G.

Таким образом, R — подгруппа конечного индекса группы G и все ее элементы π-мощные в G. Лемма доказана.

Докажем теорему 5, т. е. докажем, что для свободного произведения $G = (A * B; H)$ и для множества π из формулировки леммы 13 (при условии $H \neq A$ и $H \neq B$) следующие утверждения равносильны между собой.

1. Группа G финитно аппроксимируема.
2. Группы A/H и B/H финитно аппроксимируемы.
3. Группа G содержит подгруппу конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G.
4. Группа G почти π-мощная.
5. Группа G слабо π-мощная.

Равносильность 1 $\Longleftrightarrow$ 2 установлена в [15]. Импликация 2 $\Longrightarrow$ 3 обеспечивается леммой 13. Импликации 3 $\Longrightarrow$ 4, 3 $\Longrightarrow$ 5, 4 $\Longrightarrow$ 1 и 5 $\Longrightarrow$ 1 очевидны. Теорема 5 доказана.

7. Доказательство теоремы 1

Лемма 14. *Группа $G(m,n) = (a,b; b^{-1}a^m b = a^n)$ является почти мощной тогда и только тогда, когда $|m| = |n|$.*

Доказательство. Группа $G(m,n)$ представляет собой HNN-расширение бесконечной циклической группы $G = (a)$ со связанными подгруппами $H = (a^m)$ и $K = (a^n)$.

Если $|m| = |n| = 1$, то $G(m,n)$ — расщепляемое расширение группы G с помощью бесконечной циклической группы и в данном случае $G(m,n)$ — мощная группа.

Если $|m| = |n| > 1$, то $H = K$ — собственная подгруппа конечного индекса группы G, нормальная в $G(m,n)$. В этом случае по теореме 3 группа $G(m,n)$ почти мощная.

Таким образом, достаточность в лемме 14 доказана.

Докажем необходимость. Предположим, что $G(m,n)$ — почти мощная группа. Тогда $G(m,n)$ финитно аппроксимируема, поэтому или $|m| = 1$, или $|n| = 1$, или $|m| = |n|$ [6]. Рассуждая методом от противного, предположим, что $|m| \neq |n|$. Тогда $|m| = 1$ или $|n| = 1$. Без потери общности можно считать, что $1 = |m| \neq |n|$. Нормальное замыкание A элемента a в группе $G(\pm 1, n)$, как легко видеть, изоморфно аддитивной группе n-ичных дробей. Поэтому если через p обозначить какой-нибудь простой делитель числа n, то любой элемент группы A имеет бесконечную p-высоту. Следовательно, ни в каком конечном гомоморфном образе группы A нет элементов порядка p. Это противоречит почти мощности группы $G(\pm 1, n)$. Лемма доказана.

Лемма 15. *Группа $G = G(\pm 1, n) = (a,b; b^{-1}a^{\pm 1}b = a^n)$ π-мощная, где π — множество всех простых чисел, не делящих n.*

Доказательство. Как уже отмечалось, нормальное замыкание A элемента a в группе G изоморфно аддитивной группе n-ичных дробей. Поэтому A не содержит подгрупп, изоморфных группе Q_p p-ичных дробей ни для какого p из π. Следовательно, по лемме 1 для каждого неединичного элемента $x \in A$ и для каждого π-числа l существует π-число k такое, что $|xA^k| = l$. Очевидно, что A^k — нормальная подгруппа группы G. Так как A/A^k — конечная группа, а G/A — бесконечная циклическая группа, группа G/A^k финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что $|xA^k| = l$, следует, что существует гомоморфизм группы G/A^k на конечную группу, переводящий элемент xA^k в элемент порядка l. Тем самым доказана π-мощность в G произвольного неединичного элемента $x \in A$. Остается заметить, что π-мощность в G для произвольного элемента $x \in G \setminus A$ вытекает из того, что G/A — бесконечная циклическая группа. Лемма доказана.

Справедливость теоремы 1 обеспечивается леммами 14 и 15.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stibe P.* Conjugacy separability of certain free products with amalgamation // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 156. P. 119–129.
2. *Allenby R. B. J. T.* The potency of cyclically pinched one-relator groups // Arch. Math. 1981. V. 36. P. 204–210.

3. *Hartley B., Lennox J. C., Rhemtulla A. H.* Cyclically separated groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1982. V. 26. P. 355–384.
4. *Wong P. C., Tang C. K., Gan H. W.* Weak potency of fundamental groups of graphs of groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2010. V. 33, N 2. P. 243–251.
5. *Азаров Д. Н.* О слабой π–мощности некоторых групп и свободных произведений // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1199–1211.
6. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68, N 3. P. 199–201.
7. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. V. 27. P. 81–85.
8. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon press, 2004.
9. *Hsu T., Wise D.* Ascending HNN-extensions of polycyclic groups are residually finite // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 182, N 1. P. 65–78.
10. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
11. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN-extensions // Communs in Algebra. 1978. V. 6, N 2. P. 179–194.
12. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
13. *Rhemtulla A. H., Shirvani M.* The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups // Illinois J. Math. 2003. V. 47. P. 477–484.
14. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203–1215.
15. *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 249–264.

Поступила в редакцию 30 января 2022 г.
После доработки 30 января 2022 г.
Принята к публикации 15 июня 2022 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
azarovdn@mail.ru