Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2023. Том 64, № 6

УДК 512.543

О ПОЧТИ МОЩНОСТИ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ И РАСЩЕПЛЯЕМЫХ РАСШИРЕНИЙ

Д. Н. Азаров

Аннотация. Получены достаточные условия мощности и почти мощности для групп автоморфизмов и расщепляемых расширений некоторых групп. В частности, доказано следующее утверждение. Пусть G — конечно порожденная группа, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого числа p. Тогда любое расщепляемое расширение группы G с помощью мощной группы без кручения является мощной группой, и если ранг абелизации группы G не превосходит 2, то группа автоморфизмов группы G является почти мощной. Как следствия получены необходимые и достаточные условия почти мощности для некоторых обобщенных свободных произведений и HNN-расширений.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.601

Ключевые слова: мощная группа, финитно аппроксимируемая группа, группа автоморфизмов, расщепляемое расширение, HNN-расширение, обобщенное свободное произведение.

1. Введение

Напомним восходящее к академику А. И. Мальцеву понятие финитно аппроксимируемой группы. Группа G называется *финитно аппроксимируемой* (*аппроксимируемой конечными p-группами*), если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на конечную группу (на конечную p-группу), при котором образ элемента a отличен от 1.

Напомним также введенное Стибом [1] понятие мощного элемента. Элемент a группы G называется *мощным*, если для любого целого положительного делителя n порядка элемента a существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий элемент a в элемент порядка n (делителем бесконечности считается любое целое положительное число n). Группа G называется *мощной*, если все ее элементы мощные.

Свойство группы «быть мощной» относится к числу наиболее трудных для изучения аппроксимационных свойств групп. Так, например, на протяжении нескольких десятков лет остается открытой следующая знаменитая проблема: будет ли свободное произведение двух мощных групп мощной группой (Коуровская тетрадь, вопрос 9.1). В связи с этим отсутствуют какие-либо существенные продвижения в изучении свойства мощности для свободных конструкций.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-10061, https://rscf.ru/project/23-21-10061/.

В последнее время появились продвижения в изучении некоторых модификаций свойства мощности (таких как слабая мощность, почти мощность и т.д.) [2–4]. Наиболее нетривиальные и глубокие результаты о мощности групп были получены значительно раньше для конечных групп и для некоторых классов разрешимых групп [5, 6]. Исследования свойства мощности шли «по следам» исследований свойства финитной аппроксимируемости. Свойству финитной аппроксимируемости групп были посвящены десятки (и даже сотни) научных работ. Однако многие известные (и ставшие теперь классическими) результаты о финитной аппроксимируемости групп в силу разных причин так и не удалось распространить на свойство мощности. Здесь предпринята попытка сделать это (хотя бы в какой-то мере) для результатов Д. М. Смирнова [7], Баумслага [8] и А. И. Мальцева [9] о финитной аппроксимируемости групп автоморфизмов и расщепляемых расширений.

Прежде чем переходить к полученным результатам, отметим некоторые очевидные связи общего характера между понятиями финитной аппроксимируемости, мощности и аппроксимируемости конечными p-группами.

1. Любая мощная группа финитно аппроксимируема.

2. Если группа G аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого числа p, то она мощная.

3. Для абелевых групп без кручения (и даже для нильпотентных групп без кручения) свойство мощности равносильно аппроксимируемости конечными p-группами для каждого простого числа p.

Д. М. Смирнов [7] и (независимо) Баумслаг [8] доказали, что группа автоморфизмов конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы является финитно аппроксимируемой группой. Одной из целей настоящей работы является попытка получить аналог теоремы Смирнова — Баумслага для мощных групп.

Заметим прежде всего, что группа автоморфизмов конечно порожденной мощной группы не обязана быть мощной группой (т. е. результат Смирнова — Баумслага не может быть «механически» перенесен с финитной аппроксимируемости на свойство мощности). В самом деле, пусть G — свободная абелева группа конечного ранга $n > 1$. Очевидно, что группа G мощная. Группа автоморфизмов группы G изоморфна группе $GL(n, Z)$ целочисленных матриц размера n, но группы целочисленных матриц не обладают свойством мощности, так как они содержат в качестве подгрупп все полициклические группы [10], а среди полициклических групп существуют примеры групп, не являющихся мощными [6].

Как показывают результаты работы [4], многие финитно аппроксимируемые группы, не обладающие свойством мощности, тем не менее обладают этим свойством почти, т. е. содержат мощные подгруппы конечных индексов. Вопрос о том, будет ли почти мощной группа автоморфизмов конечно порожденной мощной группы, по-видимому, достаточно сложный.

Пока удалось доказать почти мощность группы автоморфизмов при весьма жестких дополнительных ограничениях на базовую группу. Полученный в этом направлении результат формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть G — конечно порожденная группа, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого числа p, и пусть $\operatorname{Aut} G$ — группа автоморфизмов группы G, Ω — подгруппа группы $\operatorname{Aut} G$, состоящая из всех автоморфизмов, действующих тождественно по модулю коммутанта G' группы G.*

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. *Подгруппа* Ω *аппроксимируема конечными* p*-группами для каждого простого числа* p *(и поэтому* Ω *является группой без кручения).*

2. *Все автоморфизмы из подгруппы* Ω *являются мощными элементами группы* $\operatorname{Aut} G$.

3. *Если ранг фактор-группы* G/G' *не превосходит 2, то группа* $\operatorname{Aut} G$ *почти мощная и, более того, в группе* $\operatorname{Aut} G$ *существует подгруппа* Φ *без кручения конечного индекса, содержащая* Ω *и такая, что все автоморфизмы из* Φ *являются мощными элементами группы* $\operatorname{Aut} G$.

А. И. Мальцев [9] доказал, что расщепляемое расширение конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы с помощью финитно аппроксимируемой группы является финитно аппроксимируемой группой. Этот результат может быть распространен на мощные и почти мощные группы следующим образом.

Теорема 2. *Пусть* G *— конечно порожденная группа, аппроксимируемая конечными* p*-группами для каждого простого числа* p*, и пусть* P *— расщепляемое расширение группы* G *с помощью группы* F.

1. *Если* F *— мощная группа без кручения, то* P *— мощная группа.*

2. *Если* F *— почти мощная группа и* F *почти вся без кручения, то* P *— почти мощная группа.*

3. *Если ранг фактор-группы* G/G' *не превосходит 2, то голоморф группы* G *является почти мощной группой.*

Рассмотрим следствия из теорем 1 и 2.

Следуя А. Л. Шмелькину, будем называть группу G *группой Магнуса*, если выполняются два условия.

1. Пересечение всех членов нижнего центрального ряда группы G совпадает с единичной подгруппой.

2. Все факторы нижнего центрального ряда группы G являются группами без кручения.

Очевидно, что любая конечно порожденная группа Магнуса аппроксимируема конечно порожденными нильпотентными группами без кручения. Все конечно порожденные нильпотентные группы без кручения (а значит, и все конечно порожденные группы Магнуса) аппроксимируемы конечными p-группами для каждого простого p [11]. Поэтому из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть группа* G *является конечно порожденной нильпотентной группой без кручения или конечно порожденной группой Магнуса. Тогда любое расщепляемое расширение группы* G *с помощью мощной группы без кручения является мощной группой. Если группа* G *двупорожденная, то группа автоморфизмов группы* G *и голоморф группы* G *являются почти мощными группами.*

Известно, что свойством аппроксимируемости конечными p-группами для каждого простого числа p обладают все свободные группы и все свободные разрешимые группы [11]. Поэтому из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* G *— свободная группа конечного ранга или свободная разрешимая группа конечного ранга. Тогда любое расщепляемое расширение* *группы G с помощью мощной группы без кручения является мощной группой. Если ранг группы G равен 2, то группа автоморфизмов группы G и голоморф группы G являются почти мощными группами.*

Еще одним примером группы, аппроксимируемой конечными p-группами для каждого простого числа p, служит свободное произведение двух свободных групп с циклической объединенной подгруппой, изолированной в одном из свободных множителей [12]. Поэтому из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть G — свободное произведение свободных групп A и B конечных рангов с неединичной циклической объединенной подгруппой H и подгруппа H изолирована в A. Тогда любое расщепляемое расширение группы G с помощью мощной группы без кручения является мощной группой. Если ранг группы A равен 2 и ранг группы B равен 1, то группа автоморфизмов группы G и голоморф группы G являются почти мощными группами.*

Хорошо известно, что любое расширение группы с помощью свободной группы расщепляемо. Поэтому из теоремы 2 вытекает следующее утверждение, которое используется ниже.

Следствие 4. *Пусть G — конечно порожденная группа, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого числа p.*

1. *Любое расширение группы G с помощью свободной группы является мощной группой.*

2. *Любое расширение группы G с помощью почти свободной группы является почти мощной группой.*

Рассмотрим применение следствия 4 к свободным конструкциям групп. Некоторые результаты о почти мощности свободных конструкций получены в [4]. Следствие 4 из доказанной здесь теоремы 2 позволило получить следующие две теоремы о почти мощности HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп.

Теорема 3. *Пусть G — конечно порожденная группа с нетривиальным тождеством, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого числа p, и пусть G^* — HNN-расширение группы G с собственными связанными подгруппами H и K, причем H и K имеют конечные индексы в G. Тогда следующие утверждения равносильны между собой.*

1. *Группа G^* финитно аппроксимируема.*

2. *В группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*.*

3. *Группа G^* почти мощная.*

Теорема 4. *Пусть A и B — конечно порожденные группы с нетривиальными тождествами, аппроксимируемые конечными p-группами для каждого простого p, и пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, являющейся собственной подгруппой конечного индекса в каждой из групп A и B. Тогда следующие утверждения равносильны между собой.*

1. *Группа G финитно аппроксимируема.*
2. *В группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G.*
3. *Группа G почти мощная.*

Отметим одно непосредственное следствие из теорем 3 и 4.

Следствие 5. *Пусть G — одна из следующих групп:*

HNN-расширение свободной разрешимой группы конечного ранга (конечно порожденной нильпотентной группы без кручения) с собственными связанными подгруппами конечных индексов,

свободное произведение двух свободных разрешимых групп конечного ранга (двух конечно порожденных нильпотентных групп без кручения) с собственными объединенными подгруппами конечных индексов.

Тогда для группы G условие финитной аппроксимируемости равносильно условию почти мощности.

2. Вспомогательные утверждения

Для доказательства теорем 1–4 потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть P — конечная p-группа, P' — коммутант группы P, P^p — степенная подгруппа группы P. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Группа Γ всех автоморфизмов группы P, действующих тождественно по модулю подгруппы $P'P^p$, является p-группой.*

2. *Группа Δ всех автоморфизмов группы P, действующих тождественно по модулю подгруппы P', является p-группой.*

Доказательство. Первое утверждение леммы 1 принадлежит Ф. Холлу (см., например, [13, с. 562]). Второе утверждение леммы непосредственно вытекает из первого, так как Δ содержится в Γ.

Лемма 2. *Пусть P — конечная p-группа.*

1. *Для каждого элемента a группы P и для каждого делителя p^k порядка элемента a в группе P существует характеристическая подгруппа Q такая, что порядок элемента a по модулю подгруппы Q равен p^k.*

2. *Пусть P — нормальная p-подгруппа конечной группы K. Тогда для каждого элемента a группы P и для каждого делителя p^k порядка элемента a существует гомоморфизм группы K на некоторую группу, при котором порядок образа элемента a равен p^k.*

Доказательство. Пусть a — элемент конечной p-группы P, и пусть p^k — делитель порядка элемента a. Рассмотрим в группе P характеристический ряд $P = P_1 > P_2 > \cdots > P_r = 1$, где $P_{i+1} = P_i{}^p$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Так как элемент $a^{p^{k-1}}$ отличен от 1, найдется индекс j такой, что элемент $a^{p^{k-1}}$ принадлежит P_j, но не принадлежит P_{j+1}. Очевидно, что порядок элемента a по модулю характеристической подгруппы $Q = P_{j+1}$ равен p^k. Если при этом группа P является нормальной подгруппой конечной группы K, то подгруппа Q нормальна в K и естественный гомоморфизм группы K на фактор-группу K/Q переводит элемент a в элемент порядка p^k. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — конечно порожденная группа, аппроксимируемая конечными p-группами, и пусть $\operatorname{Aut} G$ — группа автоморфизмов группы G, Ω — подгруппа группы $\operatorname{Aut} G$, состоящая из всех автоморфизмов, действующих тождественно по модулю коммутанта G' группы G. Тогда для каждого нетождественного автоморфизма φ из $\operatorname{Aut} G$ существует гомоморфизм ρ группы $\operatorname{Aut} G$ на конечную группу K, переводящий φ в неединичный элемент и такой, что $\Omega\rho$ — нормальная p-подгруппа группы K.*

Доказательство. Так как автоморфизм φ не является тождественным, то в группе G найдется элемент a такой, что элемент $a^{-1} \cdot a\varphi$ отличен от 1.

Отсюда и из аппроксимируемости группы G конечными p-группами следует, что в группе G существует нормальная подгруппа N конечного p-индекса n, не содержащая элемент $a^{-1} \cdot a\varphi$. Так как группа G конечно порожденная, она содержит только конечное число подгрупп индекса n. Обозначим через M пересечение всех нормальных подгрупп группы G индекса n. Тогда M — характеристическая подгруппа конечного p-индекса группы G, не содержащая элемент $a^{-1} \cdot a\varphi$. Характеристичность подгруппы M дает возможность рассмотреть гомоморфизм индуцирования ρ группы $\operatorname{Aut} G$ в группу $\operatorname{Aut}(G/M)$, т. е. отображение, сопоставляющее каждому автоморфизму ψ группы G автоморфизм ψ_M группы G/M, действующий по правилу: $(xM)\psi_M = x\psi M$ для каждого x из G. Так как элемент $a^{-1} \cdot a\varphi$ не принадлежит M, то образ φ_M автоморфизма φ относительно ρ отличен от 1. Группа $\operatorname{Aut}(G/M)$ конечна как группа автоморфизмов конечной группы G/M. Поэтому конечным будет и образ гомоморфизма ρ, обозначим его через K. Тогда ρ — эпиморфизм группы $\operatorname{Aut} G$ на конечную группу K, переводящий φ в неединичный элемент. Нормальность подгруппы $\Omega\rho$ в группе K обеспечивается очевидной нормальностью подгруппы Ω в группе $\operatorname{Aut} G$. Так как автоморфизмы из Ω действуют тождественно по модулю коммутанта группы G, то автоморфизмы из $\Omega\rho$ действуют тождественно по модулю коммутанта группы G/M, причем G/M является конечной p-группой. Поэтому в силу леммы 1 $\Omega\rho$ — p-группа. Лемма доказана.

Лемма 4. *Группа автоморфизмов свободной абелевой группы ранга* 2 *почти свободна.*

Доказательство. Так как группа автоморфизмов свободной абелевой группы ранга 2 изоморфна группе обратимых целочисленных матриц $GL(2, Z)$, содержащей специальную унимодулярную подгруппу $SL(2, Z)$ индекса 2, то остается напомнить, что группа $SL(2, Z)$ раскладывается в свободное произведение конечных циклических групп порядков 4 и 6 с объединенной подгруппой порядка 2 (см., например, [14, п. 1.4., задача 24]), а любое свободное произведение двух конечных групп с объединением является почти свободной группой [15]. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть A — конечно порожденная абелева группа и ранг r группы A не превосходит* 2. *Тогда группа* $\operatorname{Aut} A$ *автоморфизмов группы A либо конечна, либо почти свободна.*

Доказательство. Если $r = 0$, то группы A и $\operatorname{Aut} A$ конечны. Пусть теперь $r = 1$ или $r = 2$. Обозначим через T конечную часть группы A. Фактор-группа A/T является свободной абелевой группой ранга r. Если $r = 1$, то $\operatorname{Aut}(A/T)$ — конечная группа порядка 2. Если $r = 2$, то по лемме 4 $\operatorname{Aut}(A/T)$ почти свободна. Таким образом, $\operatorname{Aut}(A/T)$ либо конечна, либо почти свободна. Покажем, что этим свойством обладает и $\operatorname{Aut} A$.

Так как T является характеристической подгруппой группы A, можно рассмотреть гомоморфизм индуцирования ρ группы $\operatorname{Aut} A$ в группу $\operatorname{Aut}(A/T)$, т. е. отображение, сопоставляющее каждому автоморфизму φ группы A автоморфизм φ_T группы A/T, действующий по правилу: $(xT)\varphi_T = x\varphi T$ для каждого x из A. Фактор-группа $\operatorname{Aut} A/\operatorname{Ker}\rho$ наследует от группы $\operatorname{Aut}(A/T)$ свойство конечности или почти свободы.

Подгруппа $\operatorname{Ker}\rho$ конечна. В самом деле, если автоморфизм φ принадлежит $\operatorname{Ker}\rho$, то $x\varphi T = (xT)\varphi_T = xT$ для каждого x из A и поэтому $x\varphi = xt$ для подходящего t из T. Отсюда, из конечности T и конечной порожденности A следует, что выбор автоморфизма φ из $\operatorname{Ker}\rho$ ограничен конечным числом возможностей.

Таким образом, подгруппа $\operatorname{Ker}\rho$ конечна, а фактор-группа $\operatorname{Aut} A/\operatorname{Ker}\rho$ либо конечна, либо почти свободна. В первом из этих случаев группа $\operatorname{Aut} A$ конечна. Далее рассматривается второй случай — когда в группе $\operatorname{Aut} A/\operatorname{Ker}\rho$ существует свободная подгруппа $H/\operatorname{Ker}\rho$ конечного индекса. Подгруппа H имеет конечный индекс в $\operatorname{Aut} A$ и представляет собой расширение группы $\operatorname{Ker}\rho$ с помощью свободной группы. Хорошо известно, что такое расширение расщепляемо, т. е. подгруппа H является расщепляемым расширением конечной подгруппы $\operatorname{Ker}\rho$ с помощью свободной группы F. Очевидно, что F имеет конечный индекс в H (а значит, и в $\operatorname{Aut} A$), поэтому $\operatorname{Aut} A$ почти свободна. Лемма доказана.

Лемма 6. *Элемент a бесконечного порядка группы G является мощным тогда и только тогда, когда для любого простого числа p и для любого целого положительного числа k существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий элемент a в элемент порядка p^k.*

Доказательство. Пусть $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ — разложение числа n на простые множители. Очевидно, что если N_i для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G и порядок элемента a по модулю подгруппы N_i равен $p_i^{k_i}$, то $N = N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_s$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы G и порядок элемента a по модулю подгруппы N равен n. Отсюда вытекает достаточность в утверждении леммы 6. Необходимость в этом утверждении очевидна.

Лемма 7. *Пусть G — группа, H — нормальная подгруппа группы G конечного индекса, и пусть группа H аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого числа p. Тогда все элементы из H являются мощными элементами группы G. В частности, любая группа, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого p, является мощной.*

Доказательство. Пусть a — неединичный элемент группы H. Очевидно, что порядок элемента a бесконечен. Доказательство мощности элемента a в группе G в силу леммы 6 сводится к проверке следующего утверждения: для любого простого числа p и для любого целого положительного числа k существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий элемент a в элемент порядка p^k. Так как группа H аппроксимируема конечными p-группами, в группе H существует нормальная подгруппа M конечного p-индекса, не содержащая элемент $a^{p^{k-1}}$. Поскольку M имеет конечный индекс в G, пересечение L всех подгрупп группы G, сопряженных с M, имеет конечный индекс в G, причем L является нормальной подгруппой группы G. Любое сопряжение в группе G действует как автоморфизм на подгруппе H. Отсюда и из того, что M — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы H, следует, что любое сопряжение к M с помощью элемента из G является нормальной подгруппой конечного p-индекса группы H. Таким образом, L представляет собой пересечение конечного числа нормальных подгрупп конечного p-индекса группы H и поэтому H/L — конечная p-группа. Итак, H/L — нормальная p-подгруппа конечной группы G/L. Так как элемент $a^{p^{k-1}}$ не принадлежит L, то p^k делит порядок элемента aL группы H/L. Поэтому в силу леммы 2 существует гомоморфизм ρ группы G/L на некоторую группу, переводящий aL в элемент порядка p^k. Произведение естественного гомоморфизма группы G на фактор-группу G/L и гомоморфизма ρ является искомым гомоморфизмом группы G на конечную группу, переводящим элемент a в элемент порядка p^k. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть K — почти свободная группа, и пусть F — какая–нибудь нормальная свободная подгруппа конечного индекса группы K. Тогда все элементы из F являются мощными элементами группы K.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из леммы 7, так как свободные группы аппроксимируемы конечными p-группами для каждого простого числа p.

Лемма 9. *Пусть G — конечно порожденная группа, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого числа p. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Для любого неединичного элемента a группы G, для любого простого числа p и для любого целого положительного числа k в группе G существует характеристическая подгруппа N конечного p-индекса, по модулю которой порядок элемента a равен p^k.*

2. *Для любого неединичного элемента a группы G и для любого целого положительного числа n в группе G существует характеристическая подгруппа N конечного индекса такая, что порядок элемента a по модулю подгруппы N равен n.*

Доказательство. 1. Из аппроксимируемости группы G конечными p-группами следует, что в группе G существует нормальная подгруппа L конечного p-индекса p^r, не содержащая элемент $a^{p^{k-1}}$. Так как группа G конечно порождена, она содержит только конечное число подгрупп индекса p^r. Поэтому пересечение M всех нормальных подгрупп индекса p^r группы G является подгруппой конечного p-индекса, не содержащей элемент $a^{p^{k-1}}$, причем M характеристична в G.

Так как G/M — конечная p-группа и ее элемент $(aM)^{p^{k-1}}$ отличен от 1, то p^k делит порядок элемента aM. Отсюда по лемме 2 следует, что в группе G/M существует характеристическая подгруппа N/M, по модулю которой порядок элемента aM равен p^k. Тогда элемент a имеет порядок p^k по модулю подгруппы N. Так как M — характеристическая подгруппа конечного p-индекса группы G и подгруппа N/M характеристична в группе G/M, то N — характеристическая подгруппа конечного p-индекса группы G.

2. Пусть $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ — разложение числа n на простые множители. Очевидно, что если N_i для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ является характеристической подгруппой конечного индекса группы G и порядок элемента a по модулю подгруппы N_i равен $p_i^{k_i}$, то $N = N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_s$ — характеристическая подгруппа конечного индекса группы G и порядок элемента a по модулю подгруппы N равен n. Поэтому утверждение 2 леммы 9 вытекает из утверждения 1.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — конечно порожденная группа, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого числа p, и пусть $\operatorname{Aut} G$ — группа автоморфизмов группы G, Ω — подгруппа группы $\operatorname{Aut} G$, состоящая из всех автоморфизмов, действующих тождественно по модулю коммутанта G' группы G.

1. Пусть p — простое число и φ — нетождественный автоморфизм из подгруппы Ω. По лемме 3 существует гомоморфизм ρ группы $\operatorname{Aut} G$ на конечную группу K, переводящий φ в неединичный элемент и такой, что $\Omega\rho$ — p-подгруппа группы K. Ограничение гомоморфизма ρ на Ω отображает φ в неединичный элемент конечной p-группы $\Omega\rho$. Таким образом, подгруппа Ω аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого числа p (и поэтому Ω является группой без кручения).

2. Пусть φ — нетождественный автоморфизм из подгруппы Ω. Покажем, что φ — мощный элемент группы $\operatorname{Aut} G$. Так как Ω является группой без кручения, то φ имеет бесконечный порядок и поэтому в силу леммы 6 для доказательства мощности элемента φ в группе $\operatorname{Aut} G$ нужно доказать, что для любого простого числа p и для любого целого положительного числа k существует гомоморфизм группы $\operatorname{Aut} G$ на конечную группу, переводящий элемент φ в элемент порядка p^k.

По лемме 3 существует гомоморфизм ρ группы $\operatorname{Aut} G$ на конечную группу K, переводящий $\varphi^{p^{k-1}}$ в неединичный элемент и такой, что $\Omega\rho$ — нормальная p-подгруппа группы K. Так как $\varphi \in \Omega$ и $\Omega\rho$ — p-группа, то $\varphi\rho$ — p-элемент. Отсюда и из того, что элемент $(\varphi\rho)^{p^{k-1}}$ отличен от 1, следует, что p^k делит порядок элемента $\varphi\rho$.

Так как $\Omega\rho$ — нормальная p-подгруппа конечной группы K и число p^k делит порядок элемента $\varphi\rho$ подгруппы $\Omega\rho$, то по лемме 2 (п. 2) существует гомоморфизм σ группы K на некоторую группу, переводящий $\varphi\rho$ в элемент порядка p^k. Поэтому φ — мощный элемент группы $\operatorname{Aut} G$. Таким образом, все автоморфизмы из подгруппы Ω являются мощными элементами группы $\operatorname{Aut} G$.

3. Пусть ранг фактор-группы G/G' не превосходит 2. По лемме 5 группа $\operatorname{Aut}(G/G')$ автоморфизмов группы G/G' либо конечна, либо почти свободна.

Покажем, что в группе $\operatorname{Aut} G$ существует подгруппа Φ конечного индекса, не имеющая кручения, содержащая Ω и такая, что все автоморфизмы из Φ являются мощными элементами группы $\operatorname{Aut} G$.

Характеристичность подгруппы G' в группе G позволяет рассмотреть гомоморфизм индуцирования ρ группы $\operatorname{Aut} G$ в группу $\operatorname{Aut}(G/G')$, т. е. отображение, сопоставляющее каждому автоморфизму ψ группы G автоморфизм $\psi_{_{G'}}$ группы G/G', действующий по правилу: $(xG')\psi_{_{G'}} = x\psi G'$ для каждого x из G. Так как ядро гомоморфизма ρ очевидно совпадает с Ω, то фактор-группа $(\operatorname{Aut} G)/\Omega$ изоморфна подгруппе группы $\operatorname{Aut}(G/G')$, которая, как отмечалось выше, либо конечна, либо почти свободна. Поэтому и группа $(\operatorname{Aut} G)/\Omega$ либо конечна, либо почти свободна.

Если группа $(\operatorname{Aut} G)/\Omega$ конечна, то в качестве искомой подгруппы Φ можно взять Ω (так как в силу уже доказанных утверждений 1 и 2 теоремы 1 подгруппа Ω не имеет кручения и все ее элементы являются мощными в группе $\operatorname{Aut} G$).

Рассмотрим теперь случай, когда группа $(\operatorname{Aut} G)/\Omega$ почти свободна. Пусть $F = \Phi/\Omega$ — какая–нибудь нормальная свободная подгруппа конечного индекса группы $(\operatorname{Aut} G)/\Omega$. Заметим прежде всего, что группа Φ не имеет кручения как расширение группы Ω без кручения с помощью свободной группы. Очевидно, что Φ — подгруппа группы $\operatorname{Aut} G$ конечного индекса, содержащая Ω. Для завершения доказательства п. 3 теоремы 1 остается проверить, что все автоморфизмы из Φ являются мощными элементами группы $\operatorname{Aut} G$.

Пусть φ — произвольный автоморфизм из Φ. Если φ принадлежит Ω, то в силу уже доказанного п. 2 теоремы 1 φ является мощным элементом группы

$\mathrm{Aut}\,G$. Пусть теперь φ не принадлежит Ω. Тогда $\varphi\Omega$ — неединичный элемент почти свободной группы $(\mathrm{Aut}\,G)/\Omega$, причем $\varphi\Omega$ принадлежит нормальной свободной подгруппе $F = \Phi/\Omega$, имеющей конечный индекс в $(\mathrm{Aut}\,G)/\Omega$. По лемме 8 все элементы из F (и, в частности, $\varphi\Omega$) являются мощными элементами группы $(\mathrm{Aut}\,G)/\Omega$. Так как $\varphi\Omega$ — мощный элемент бесконечного порядка группы $(\mathrm{Aut}\,G)/\Omega$, то φ — мощный элемент бесконечного порядка группы $\mathrm{Aut}\,G$. Таким образом, все автоморфизмы из Φ являются мощными элементами группы $\mathrm{Aut}\,G$.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть G — конечно порожденная группа, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого числа p, и пусть P — расщепляемое расширение группы G с помощью группы F. Это означает, что G — нормальная подгруппа группы P, F — подгруппа группы P, произведение подгрупп G и F совпадает с группой P, а пересечение подгрупп G и F тривиально.

1. Пусть F — мощная группа без кручения. Покажем, что P — мощная группа, т. е. что любой неединичный элемент a группы P является мощным.

Рассмотрим сначала случай, когда a не принадлежит G. Так как фактор-группа P/G изоморфна группе F, она является мощной группой без кручения. Поэтому aG — мощный элемент бесконечного порядка группы P/G. Отсюда следует, что a — мощный элемент бесконечного порядка группы P.

Рассмотрим теперь случай, когда a принадлежит G. Пусть n — целое положительное число. По лемме 9 в группе G существует характеристическая подгруппа N конечного индекса такая, что порядок элемента a по модулю подгруппы N равен n. Так как N характеристична в G и G нормальна в P, то N нормальна в P. Фактор-группа P/N представляет собой расщепляемое расширение конечной группы G/N с помощью группы FN/N. Группа FN/N изоморфна группе F и, следовательно, является мощной (и потому финитно аппроксимируемой). Очевидно, что любое расщепляемое расширение конечной группы с помощью финитно аппроксимируемой группы является финитно аппроксимируемой группой. Таким образом, группа P/N финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что порядок элемента aN группы P/N равен n, следует, что существует гомоморфизм ρ группы P/N на конечную группу, переводящий элемент aN в элемент порядка n. Тогда произведение естественного гомоморфизма группы P на фактор-группу P/N и гомоморфизма ρ отображает группу P на конечную группу и переводит элемент a в элемент порядка n. Тем самым доказана мощность элемента a.

2. Пусть F — почти мощная группа и F почти вся без кручения. Это означает, что группа F содержит мощную подгруппу H без кручения конечного индекса. Произведение HG имеет конечный индекс в P и представляет собой расщепляемое расширение группы G с помощью группы H. В силу уже доказанного п. 2 теоремы 2 группа HG является мощной. Поэтому P — почти мощная группа.

3. Пусть ранг фактор-группы G/G' группы G по ее коммутанту G' не превосходит 2. Покажем, что голоморф группы G является почти мощной группой. По теореме 1 (п. 3) группа $\mathrm{Aut}\,G$ является почти мощной, по той же теореме она почти вся без кручения. Поэтому в силу уже доказанного п. 2 теоремы 2 любое расщепляемое расширение группы G с помощью группы $\mathrm{Aut}\,G$ (в том

числе и голоморф группы G) является почти мощной группой.

Теорема 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 3

Пусть G — конечно порожденная группа с нетривиальным тождеством, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого числа p, и пусть G^* — HNN-расширение группы G с собственными связанными подгруппами H и K, причем H и K имеют конечные индексы в G. Покажем, что следующие утверждения равносильны между собой.

1. Группа G^* финитно аппроксимируема.

2. В группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*.

3. Группа G^* является почти мощной.

Равносильность условий 1 и 2 доказана в работе [16]. Так как любая почти мощная группа финитно аппроксимируема, то из условия 3 вытекает условие 1. Остается проверить, что из условия 2 вытекает условие 3.

Пусть в группе G существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G^*. Группа L наследует от группы G свойства конечной порожденности и аппроксимируемости конечными p-группами для всех простых p. Фактор-группа G^*/L представляет собой HNN-расширение конечной группы G/L и поэтому почти свободна [17]. Из последних двух обстоятельств в силу следствия 4 вытекает почти мощность группы G^*.

Теорема 3 доказана.

6. Доказательство теоремы 4

Пусть A и B — конечно порожденные группы с нетривиальными тождествами, аппроксимируемые конечными p-группами для каждого простого p, и пусть $G = (A*B; H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, являющейся собственной подгруппой конечного индекса в каждой из групп A и B. Покажем, что следующие утверждения равносильны между собой.

1. Группа G финитно аппроксимируема.

2. В группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G.

3. Группа G является почти мощной.

Равносильность условий 1 и 2 доказана в работе [16]. Из условия 3 очевидным образом вытекает условие 1. Остается проверить, что из условия 2 вытекает условие 3.

Пусть в группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G. Группа L наследует от групп A и B свойства конечной порожденности и аппроксимируемости конечными p-группами для всех простых p. Фактор-группа G/L представляет собой свободное произведение двух конечных групп A/L и B/L с объединением H/L и поэтому почти свободна [15]. Из последних двух обстоятельств в силу следствия 4 вытекает почти мощность группы G.

Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stibe P.* Conjugacy separability of certain free products with amalgamation // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 156. P. 119–129.

2. *Wong P. C., Tang C. K., Gan H. W.* Weak potency of fundamental groups of graphs of groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2010. V. 33, N 2. P. 243–251.
3. *Азаров Д. Н.* О слабой π-мощности некоторых групп и свободных произведений // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1199–1211.
4. *Азаров Д. Н.* О почти мощности некоторых групп и свободных конструкций // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 6. С. 1023–1033.
5. *Allenby R. B. J. T.* The potency of cyclically pinched one-relator groups // Arch. Math. 1981. V. 36. P. 204–210.
6. *Hartley B., Lennox J. C., Rhemtulla A. H.* Cyclically separated groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1982. V. 26. P. 355-384.
7. *Смирнов Д. М.* К теории финитно аппроксимируемых групп // Укр. мат. журн. 1963. Т. 15. С. 453–457.
8. *Baumslag G.* Automorphism groups of residually finite groups // J. London Math. Soc. 1963. V. 38. P. 117–118.
9. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49–60.
10. *Мерзляков Ю. И.* Целочисленное представление голоморфов полициклических групп // Алгебра и логика. 1980. Т. 9, № 5. С. 539–558.
11. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1057. V. 3, N 7. P. 29–62.
12. *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 1. С. 3–8.
13. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.
14. *Магнус В., Каррас А, Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
15. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
16. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203–1215.
17. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN-extensions // Commun. Algebra. 1978. V. 6. P. 179–194.

Поступила в редакцию 30 марта 2023 г.
После доработки 30 марта 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
azarovdn@mail.ru