

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ О СЛАБОЙ МОЩНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Д. Н. Азаров

Аннотация. Пусть G — свободное произведение с одной объединенной подгруппой H групп G_i , где $i \in I$. Для группы G получена фильтрационная теорема, дающая общий метод, который позволяет доказывать почти все известные теоремы о слабой мощности обобщенных свободных произведений групп. С помощью этого метода доказан ряд новых результатов о слабой мощности группы G при дополнительных ограничениях на группы G_i и подгруппу H . Доказанная здесь фильтрационная теорема является аналогом классической фильтрационной теоремы Баумслэга о финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.502

Ключевые слова: мощная группа, финитно аппроксимируемая группа, обобщенное свободное произведение групп.

1. Введение

Напомним, что элемент x бесконечного порядка группы A называется *слабо мощным*, если существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n существует гомоморфизм группы A на конечную группу, переводящий x в элемент порядка mn . При $m = 1$ это определение совпадает с классическим определением мощного элемента. Группа A называется *слабо мощной*, если она финитно аппроксимируема и все ее элементы бесконечного порядка являются слабо мощными.

Понятие слабой мощности группы является одной из наиболее удачных модификаций классического понятия мощности. Об этом свидетельствует ряд недавних исследований слабой мощности свободных конструкций [1–4]. Исследования классического свойства мощности свободных конструкций сталкиваются с большими трудностями.

Изучение свойства мощности и его модификаций для свободных конструкций идет «по следам» исследований свойства финитной аппроксимируемости. Доказательства почти всех известных теорем о финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп идейно основаны на так называемой фильтрационной теореме Баумслэга [5], дающей весьма общие достаточные условия финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения групп (формулировка приведена ниже — теорема 1, п. 1). Изначально эта теорема была сформулирована и доказана Баумслэгом для свободного произведения

Исследование выполнено за счет гранта по приоритетным направлениям деятельности РНФ «Аппроксимационные свойства групп» (2025–2026).

двух групп с объединенной подгруппой. Затем в работе Ширвани [6] она была частично обращена и распространена на свободное произведение произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой (теорема 2, п. 1). Здесь будут доказаны аналоги результатов Баумслага и Ширвани, дающие общие методы для исследования слабой мощности свободного произведения любого семейства групп с одной объединенной подгруппой.

Переходя к формулировкам фильтрационных теорем, напомним прежде всего, что семейство $(A_j)_{j \in J}$ подгрупп группы A называется *фильтрацией*, если $\bigcap_{j \in J} A_j = 1$. Семейство $(A_j)_{j \in J}$ подгрупп группы A называется *B-фильтрацией*, где B — подгруппа группы A , если $\bigcap_{j \in J} BA_j = B$. Пусть теперь $(A_j)_{j \in J}$ — семейство всех нормальных подгрупп конечного индекса группы A . Очевидно, что семейство $(A_j)_{j \in J}$ является фильтрацией (B -фильтрацией) тогда и только тогда, когда группа A финитно аппроксимируема (подгруппа B финитно отделима в группе A).

Для формулировок фильтрационных теорем нам потребуется ряд обозначений, которые будут использоваться всюду в этой работе.

Через G будем обозначать свободное произведение групп семейства $(G_i)_{i \in I}$ с одной объединенной подгруппой H . Для группы G будем использовать также и следующее более развернутое обозначение:

$$G = *_{i \in I} G_i(H).$$

Хорошо известно, что все свободные множители G_i естественным образом вложимы в группу G . Поэтому мы можем считать, что все G_i (и объединенная подгруппа H) являются подгруппами группы G . Тогда $G_i \cap G_j = H$ для любых различных $i, j \in I$.

В каждом свободном множителе G_i выберем какую-нибудь подгруппу U_i . Систему подгрупп $U = (U_i)_{i \in I}$ будем называть *нормальной*, если U_i — нормальная подгруппа группы G_i для каждого $i \in I$. Систему подгрупп $U = (U_i)_{i \in I}$ будем называть *H-совместимой*, если $H \cap U_i = H \cap U_j$ для любых $i, j \in I$. Систему подгрупп $U = (U_i)_{i \in I}$ будем называть *ограниченной*, если индексы $[G_i : U_i]$ конечны и ограничены.

Чтобы одновременно рассматривать несколько нормальных H -совместимых ограниченных систем, будем индексировать каждую такую систему $U = (U_i)_{i \in I}$ и все входящие в нее подгруппы U_i верхним индексом $\lambda \in \Lambda$. Тогда система $U = (U_i)_{i \in I}$ будет записана в виде

$$U^\lambda = (U_i^\lambda)_{i \in I},$$

где $\lambda \in \Lambda$, а семейство $(U^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ представляет собой семейство всех нормальных H -совместимых ограниченных систем.

Заметим, что для любого $\lambda \in \Lambda$ и для любого $i \in I$ подгруппа U_i^λ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G_i , для каждого фиксированного $\lambda \in \Lambda$ семейство $(U_i^\lambda)_{i \in I}$ является нормальной H -совместимой ограниченной системой и для каждого фиксированного $i \in I$ семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ состоит из тех и только тех нормальных подгрупп конечного индекса группы G_i , которые входят в нормальные H -совместимые ограниченные системы. Заметим, что подгруппы из семейства $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ не обязаны быть попарно различными. Особое значение имеют следующие два фильтрационные условия,

которые в некоторых сформулированных ниже теоремах наложены на семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

1. Семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией, т. е.

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_i^\lambda = 1.$$

2. Семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией, т. е.

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} HU_i^\lambda = H.$$

Теорема 1. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$, и пусть для каждого $i \in I$ семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией и H -фильтрацией. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Группа G финитно аппроксимируема.
2. Если элемент g группы G не сопряжен в группе G ни в какой свободный множитель G_i , то g — слабо мощный элемент группы G .
3. Если элемент g бесконечного порядка группы G сопряжен в группе G с некоторым элементом a из свободного множителя G_i , то элемент g является слабо мощным в группе G тогда и только тогда, когда элемент a является слабо мощным в группе G_i по модулю семейства $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Здесь и далее мы называем элемент x бесконечного порядка группы A *слабо мощным по модулю семейства* $(A_j)_{j \in J}$ нормальных подгрупп конечного индекса группы A , если существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n существует $j \in J$ такой, что порядок элемента x по модулю подгруппы A_j равен mn .

Первое утверждение теоремы 1 хорошо известно как фильтрационная теорема Баумслага и доказано в [5, 6]. Доказательства второго и третьего утверждений теоремы 1 приведены ниже.

Теорема 2. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и все свободные множители G_i являются группами с нетривиальными тождествами. Пусть множество I содержит более одного элемента и $H \neq G_i$ для каждого $i \in I$.

1. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I$ семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией и H -фильтрацией.
2. Группа G является слабо мощной тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I$ семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией и H -фильтрацией и для каждого $i \in I$ все элементы бесконечного порядка группы G_i являются слабо мощными по модулю семейства $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Достаточность в первом утверждении теоремы 2 обеспечивается утверждением 1 теоремы 1, а необходимость доказана Ширвани в работе [6], посвященной обращению теоремы Баумслага. Второе утверждение теоремы 2 является непосредственным следствием из теоремы 1 и первого утверждения теоремы 2.

На основе теорем 1 и 2 при дополнительных ограничениях на свободные множители и объединенную подгруппу могут быть доказаны многие известные результаты о финитной аппроксимируемости и слабой мощности обобщенных свободных произведений групп. Формулировки этих результатов выглядят достаточно просто — они не содержат фильтрационных условий и условий слабой

мощности по модулю семейства подгрупп. Здесь с помощью теорем 1 и 2 мы докажем несколько новых результатов о слабой мощности группы $G = *_{i \in I} G_i(H)$, первый из которых относится к случаю, когда объединенная подгруппа H конечна, а остальные — к случаю, когда H — бесконечная циклическая группа.

Теорема 3. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и все свободные множители G_i являются слабо мощными группами. Пусть объединенная подгруппа H конечна. Тогда следующие условия равносильны.

1. Группа G является слабо мощной.
2. Для каждого $i \in I$ в группе G_i существует нормальная подгруппа U_i конечного индекса, тривиально пересекающая H и такая, что индексы $[G_i : U_i]$ ограничены.
3. Группа G финитно аппроксимируема.

Отсюда следует, что свободное произведение конечного числа слабо мощных групп с одной конечной объединенной подгруппой является слабо мощной группой. Это утверждение известно и доказано в [1].

Рассмотрим теперь случай, когда объединенная подгруппа H является бесконечной циклической. Для порождающего элемента h подгруппы H критерий мощности (слабой мощности) имеет следующий вид.

Теорема 4. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и объединенная подгруппа H является бесконечной циклической с порождающим элементом h . Тогда следующие два условия равносильны.

1. Элемент h является мощным (слабо мощным) в группе G .
2. Для любого $i \in I$ и для любого целого положительного числа n в группе G_i существует нормальная подгруппа U_{in} конечного индекса такая, что $H \cap U_{in} = H^n$, и при каждом фиксированном n индексы $[G_i : U_{in}]$ ограничены (существует целое положительное число m такое, что для любого $i \in I$ и для любого целого положительного числа n в группе G_i существует нормальная подгруппа U_{in} конечного индекса такая, что $H \cap U_{in} = H^{mn}$, и при каждом фиксированном n индексы $[G_i : U_{in}]$ ограничены).

Если множество I конечно, то условия 1 и 2 равносильны следующему условию.

3. Элемент h является мощным (слабо мощным) в каждом свободном множителе G_i .

Как показывает установленная здесь теорема 5 (см. ниже), при определенных условиях слабая мощность свободного произведения $G = *_{i \in I} G_i(H)$ с бесконечной циклической объединенной подгруппой H равносильна слабой мощности в группе G порождающего элемента h подгруппы H .

Теорема 5. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$, все свободные множители G_i являются слабо мощными группами, и пусть объединенная подгруппа H является бесконечной циклической группой и H финитно отделима в каждом свободном множителе G_i .

1. Группа G является слабо мощной тогда и только тогда, когда порождающий элемент h подгруппы H является слабо мощным в G .
2. Если множество I конечно, то группа G является слабо мощной.

Заметим, что если в условиях теоремы 5 множество I конечно, то по теореме 4 элемент h будет слабо мощным в группе G . Поэтому второе утверждение теоремы 5 является непосредственным следствием из первого утверждения теоремы 5 и теоремы 4.

Второе утверждение теоремы 5 известно и доказано в работе [4].

Теорема 6. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и все свободные множители G_i являются слабо мощными группами с нетривиальными тождествами. Пусть объединенная подгруппа H является бесконечной циклической, множество I содержит более одного элемента и $H \neq G_i$ для каждого $i \in I$. Тогда следующие три утверждения равносильны.

1. Группа G является слабо мощной.
2. Подгруппа H финитно отделима в группе G_i для каждого $i \in I$, и порождающий элемент h подгруппы H является слабо мощным в G .
3. Группа G финитно аппроксимируема, и порождающий элемент h подгруппы H является слабо мощным в G .

Теорема 6 является непосредственным следствием сформулированных выше теорем. В самом деле, импликация $1 \Rightarrow 3$ очевидна. Импликация $3 \Rightarrow 2$ имеет место, так как из финитной аппроксимируемости группы G по теореме 2 следует, что для каждого $i \in I$ семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией, откуда следует, что H финитно отделима в группе G_i для каждого $i \in I$. Импликация $2 \Rightarrow 1$ имеет место в силу первого утверждения теоремы 5.

Если в теореме 6 дополнительно потребовать конечность множества I , то по теореме 4 элемент h будет слабо мощным в группе G и тогда теорема 6 примет следующий более заверченный вид.

Теорема 7. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и все свободные множители G_i являются слабо мощными группами с нетривиальными тождествами. Пусть объединенная подгруппа H является бесконечной циклической, множество I конечно, содержит более одного элемента и $H \neq G_i$ для каждого $i \in I$. Тогда порождающий элемент h подгруппы H является слабо мощным в G и следующие три утверждения равносильны.

1. Группа G является слабо мощной.
2. Подгруппа H финитно отделима в группе G_i для каждого $i \in I$.
3. Группа G финитно аппроксимируема.

Так как почти полициклические группы являются слабо мощными [1, следствие 1.1] и в них все подгруппы финитно отделимы, то из теоремы 7 вытекает следующее утверждение: свободное произведение конечного числа почти полициклических групп с одной бесконечной циклической объединенной подгруппой является слабо мощной группой. Это утверждение известно и доказано в [1].

Более содержательным и нетривиальным следствием из рассмотренных выше фильтрационных теорем является следующий результат.

Теорема 8. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и все свободные множители G_i являются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения с ограниченными рангами Гирша. Пусть объединенная подгруппа H является бесконечной циклической группой с порождающим элементом h . Для каждого $i \in I$ обозначим через n_i наибольшее из всех целых положительных n таких, что уравнение $x^n = h$ разрешимо в группе G_i . Пусть Q_G — подгруппа аддитивной группы Q рациональных чисел, порожденная всеми дробями $1/n_i$, где $i \in I$.

1. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $Q_G \neq Q$.
2. Группа G является слабо мощной тогда и только тогда, когда Q_G не содержит подгруппу Q_p p -ичных дробей ни для какого простого p .

Первое утверждение теоремы 8 известно и доказано в работе [7].

Далее приведены доказательства теорем 1 (утверждения 2, 3); 3; 4; 5 (утверждение 1); 8 (утверждение 2).

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Пусть K — почти свободная группа, и пусть F — какая-нибудь нормальная свободная подгруппа конечного индекса группы K . Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Все элементы из F являются мощными в K .
2. Группа K является слабо мощной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы доказано в [8, лемма 8]. Для доказательства второго утверждения заметим прежде всего, что группа K финитно аппроксимируема. Докажем слабую мощность для любого элемента x бесконечного порядка группы K . Пусть $X = \langle x \rangle$ — циклическая подгруппа группы K , порожденная элементом x . Тогда $X \cap F = X^m = \langle x^m \rangle$ для некоторого целого положительного числа m . Так как $x^m \in F$, то по первому утверждению леммы 1 элемент x^m является мощным в K , т. е. для любого целого положительного числа n в группе K существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $X^m \cap N = X^{mn}$. Тогда $L = F \cap N$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы K и $X \cap L = X \cap F \cap N = X^m \cap N = X^{mn}$. Тем самым доказана слабая мощность элемента x в группе K .

Лемма 2. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$, все свободные множители G_i конечны и их порядки ограничены. Тогда группа G почти свободна и (в силу леммы 1) является слабо мощной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что группа G финитно аппроксимируема (см., например, [9, теорема 1.1]). Поэтому в группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, тривиально пересекающая конечную подгруппу H . Тогда в силу теоремы Неймана [10, с. 122] группа P раскладывается в свободное произведение $P = F * A_1 * A_2 * \dots$, где F — свободная группа, $A_1, A_2, \dots$ — сопряжения некоторых подгрупп свободных множителей G_i . Из условий леммы следует, что группы $A_1, A_2, \dots$ конечны и их порядки ограничены. Поэтому с точностью до изоморфизма группы $A_1, A_2, \dots$ исчерпываются конечным набором групп $B_1, B_2, \dots, B_n$. Рассмотрим гомоморфизм φ группы P на прямое произведение $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$, переводящий F в 1 и действующий на каждом свободном множителе A_i как изоморфизм на подходящий прямой множитель B_j . Ядро L гомоморфизма φ является нормальной подгруппой конечного индекса группы P , тривиально пересекающей подгруппы $A_1, A_2, \dots$. Поэтому L — свободная подгруппа конечного индекса группы P . Отсюда и из того, что P имеет конечный индекс в G , следует, что G почти свободна.

3. Используемые обозначения и предварительные замечания

Пусть, как и выше, $G = *_{i \in I} G_i(H)$ — свободное произведение групп G_i с одной объединенной подгруппой H . Здесь и далее сохраняются все обозначения из разд. 1.

С каждой нормальной H -совместимой системой подгрупп $U = (U_i)_{i \in I}$ свяжем свободное произведение $G_U = *_{i \in I} G_i/U_i(H_U)$ групп G_i/U_i с одной объединенной подгруппой H_U , склеивающие соотношения которого имеют вид $hU_i =$

hU_j , где $h \in H$, $i \in I$, $j \in I$, а объединенная подгруппа H_U совпадает с каждой из подгрупп HU_i/U_i .

Если $U = (U_i)_{i \in I}$ — нормальная H -совместимая система, то через $\rho_U : G \rightarrow G_U$ будем обозначать гомоморфизм группы G на группу G_U , продолжающий естественные гомоморфизмы $G_i \rightarrow G_i/U_i$, где $i \in I$. Заметим, что $H\rho_U = H_U$.

Если нормальная H -совместимая система $U = (U_i)_{i \in I}$ является ограниченной, то группа G_U представляет собой свободное произведение конечных групп G_i/U_i ограниченных порядков с объединением H_U и поэтому в силу леммы 2 группа G_U является слабо мощной.

Если N — нормальная подгруппа конечного индекса группы G , то система $U = (G_i \cap N)_{i \in I}$ нормальна, H -совместима и ограничена. Поэтому существует $\lambda \in \Lambda$ такой, что $U = U^\lambda$, т. е. $G_i \cap N = U_i^\lambda$ для всех $i \in I$. Отсюда следует, что если группа G финитно аппроксимируема (т. е. если семейство всех ее нормальных подгрупп конечного индекса является фильтрацией), то и семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ также является фильтрацией для каждого $i \in I$. Это необходимое условие финитной аппроксимируемости группы G не является достаточным. Достаточные условия финитной аппроксимируемости группы G указаны в теореме 1.

4. Доказательство теоремы 1

Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ — свободное произведение групп G_i с одной объединенной подгруппой H . Здесь и далее сохраняются все обозначения из разд. 1 и 3.

Лемма 3. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$, и пусть семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией для некоторого $i \in I$. Тогда для любого элемента $a \in G_i \setminus H$ существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу такой, что $a\varphi \notin H\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы $a \notin HU_i^\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Системе $U^\lambda = (U_i^\lambda)_{i \in I}$ для удобства будем обозначать через $U = (U_i)_{i \in I}$. Как отмечалось в разд. 3, группа $G_U = *_{i \in I} G_i/U_i(H_U)$ является слабо мощной и поэтому она финитно аппроксимируема. Так как $a \notin HU_i$, то $aU_i \notin HU_i/U_i$. С другой стороны, по определению гомоморфизма $\rho_U : G \rightarrow G_U$ имеем $a\rho_U = aU_i$, $H\rho_U = HU_i/U_i$. Таким образом, $a\rho_U \notin H\rho_U$, причем $H\rho_U = H_U$ — конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы G_U , и поэтому $H\rho_U$ финитно отделима в G_U . Следовательно, существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную группу такой, что $a\rho_U\rho \notin H\rho_U\rho$. Гомоморфизм $\varphi = \rho_U\rho$ является искомым. Лемма доказана.

Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$. Напомним, что *несократимой записью элемента* $a \in G$ называется выражение $a = a_1a_2 \dots a_s$, где сомножители a_k принадлежат свободным множителям G_i , причем при $s > 1$ сомножители a_k не входят в объединенную подгруппу H , и соседние сомножители a_k и a_{k+1} не лежат в одном и том же свободном множителе G_i . Несократимая запись $a = a_1a_2 \dots a_s$ называется *циклически несократимой*, если при $s > 1$ крайние сомножители a_1 и a_s не лежат в одном и том же свободном множителе G_i . Хорошо известно, что если элемент $a \in G$ имеет несократимую запись длины $s > 1$, то $a \neq 1$. Поэтому если элемент $a \in G$ имеет циклически несократимую запись длины $s > 1$, то порядок элемента a бесконечен. Элемент $a \in G$, обладающий циклически несократимой записью, называется *циклически несократимым элементом*.

Лемма 4. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией для каждого $i \in I$. Пусть g — элемент группы G , не сопряженный ни в какой свободный множитель G_i . Тогда g — слабо мощный элемент группы G .

Доказательство. Хорошо известно и легко проверяется, что любой элемент группы G сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Обозначим через a циклически несократимый элемент группы G , сопряженный с g . Так как порядки сопряженных элементов (и их гомоморфных образов) равны, то нам достаточно доказать слабую мощность для элемента a . По условию леммы элемент a не принадлежит никакому свободному множителю. Поэтому его циклически несократимая запись имеет вид $a = a_1 a_2 \dots a_s$, где $s > 1$, сомножители a_k принадлежат свободным множителям G_i и не входят в объединенную подгруппу H , причем соседние сомножители a_k и a_{k+1} (а также крайние сомножители a_1 и a_s) не лежат в одном и том же свободном множителе G_i .

Так как для каждого $k = 1, 2, \dots, s$ существует $i \in I$ такой, что $a_k \in G_i \setminus H$, и так как семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией, то по лемме 3 для каждого $k = 1, 2, \dots, s$ существует гомоморфизм φ_k группы G на конечную группу такой, что $a_k \varphi_k \notin H \varphi_k$, т. е. $a_k \notin H N_k$, где N_k — ядро гомоморфизма φ_k . Тогда $a_k \notin H N$ для каждого $k = 1, 2, \dots, s$, где $N = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_s$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы G .

Для каждого $i \in I$ введем обозначение $U_i = G_i \cap N$. Так как N — нормальная подгруппа конечного индекса группы G , то система $U = (U_i)_{i \in I}$ нормальна, H -совместима и ограничена, и тогда в силу леммы 2 группа $G_U = *_{i \in I} G_i/U_i(H_U)$ является слабо мощной.

Очевидно, что естественный гомоморфизм $\varepsilon : G \rightarrow G/N$ проходит через гомоморфизм $\rho_U : G \rightarrow G_U$, т. е. существует гомоморфизм $\sigma : G_U \rightarrow G/N$ такой, что $\varepsilon = \rho_U \sigma$.

Так как $a_k \notin H N$ для каждого $k = 1, 2, \dots, s$, то $a_k \varepsilon \notin H \varepsilon$. Отсюда и из того, что $\varepsilon = \rho_U \sigma$, следует, что для каждого $k = 1, 2, \dots, s$ элемент $a_k \rho_U$ не принадлежит объединенной подгруппе $H \rho_U = H_U$ группы $G_U = *_{i \in I} G_i/U_i(H_U)$. Поэтому запись

$$a \rho_U = a_1 \rho_U a_2 \rho_U \dots a_s \rho_U$$

несократима (и даже циклически несократима) в G_U , причем ее длина $s > 1$. Поэтому порядок элемента $a \rho_U$ бесконечен, а так как группа G_U является слабо мощной, то существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n существует гомоморфизм φ группы G_U на конечную группу такой, что порядок элемента $a \rho_U \varphi$ равен mn . Слабая мощность элемента a доказана.

Лемма 5. Пусть g — элемент бесконечного порядка группы $G = *_{i \in I} G_i(H)$, сопряженный с элементом a из свободного множителя G_i . Тогда для произвольного целого положительного числа n следующие два условия равносильны.

1. В группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что порядок элемента g по модулю подгруппы N равен n .

2. Существует $\lambda \in \Lambda$ такой, что порядок элемента a по модулю подгруппы U_i^λ равен n .

В частности, элемент g является слабо мощным в G тогда и только тогда, когда элемент a является слабо мощным по модулю семейства $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Доказательство. Пусть N — нормальная подгруппа конечного индекса группы G и $|gN| = n = |aN|$. Тогда система $U = (G_i \cap N)_{i \in I}$ нормальна, H -совместима и ограничена. Поэтому существует $\lambda \in \Lambda$ такой, что $U = U^\lambda =$

$(U_i^\lambda)_{i \in I}$. Так как $a \in G_i$ и $G_i \cap N = U_i^\lambda$, то $|aU_i^\lambda| = |aN| = n$. Мы видим, что из условия 1 вытекает условие 2.

Наоборот, пусть выполняется условие 2, т. е. $|aU_i^\lambda| = n$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Систему $U^\lambda = (U_i^\lambda)_{i \in I}$ для удобства будем обозначать через $U = (U_i)_{i \in I}$. Гомоморфизм $\rho_U : G \rightarrow G_U$ отображает элемент a из G_i на элемент $a\rho_U = aU_i$ порядка n , а так как группа G_U финитно аппроксимируема, то существует гомоморфизм φ группы G_U на конечную группу такой, что порядок элемента $a\rho_U\varphi$ равен n . Ядро N гомоморфизма $\rho_U\varphi$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G , и порядок элемента a (а значит, и сопряженного с ним элемента g) по модулю подгруппы N равен n . Таким образом, выполняется условие 1. Лемма доказана.

Утверждения 2 и 3 доказываемой теоремы 1 обеспечиваются леммами 4 и 5 соответственно. Утверждение 1 теоремы 1 доказано в работах [5, 6].

5. Доказательство теоремы 3

Лемма 6. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ — свободное произведение слабо мощных групп G_i с одной конечной объединенной подгруппой H . Пусть для каждого $i \in I$ в группе G_i существует нормальная подгруппа U_i конечного индекса, тривиально пересекающая H и такая, что индексы $[G_i : U_i]$ ограничены. Тогда группа G является слабо мощной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $i \in I$ обозначим через Φ_i множество всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G_i . Так как группа G_i финитно аппроксимируема и ее конечная подгруппа H финитно отделима, то множество Φ_i является фильтрацией и H -фильтрацией. Обозначим через Ω_i подмножество множества Φ_i , состоящее из всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G_i , тривиально пересекающих H . Если $T \in \Phi_i$, то $T \cap U_i \in \Omega_i$. Отсюда и из того, что множество Φ_i является фильтрацией и H -фильтрацией, следует, что и множество Ω_i является фильтрацией и H -фильтрацией.

Очевидно, что система $U = (U_i)_{i \in I}$ нормальна, H -совместима и ограничена, т. е. $U = U^\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Очевидно также, что если в системе U заменить какую-либо подгруппу U_i на любую другую подгруппу из Ω_i , то получится снова нормальная H -совместимая ограниченная система. Поэтому $\Omega_i \subseteq (U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Отсюда и из того, что Ω_i является фильтрацией и H -фильтрацией, следует, что и $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией и H -фильтрацией. Поэтому в силу пп. 1, 2 теоремы 1 группа G финитно аппроксимируема и в ней будет слабо мощным любой элемент g , не сопряженный ни в какой свободный множитель G_i .

Теперь для завершения доказательства леммы остается проверить слабую мощность для элемента g бесконечного порядка группы G , сопряженного с элементом a из свободного множителя G_i . Пусть $A = \langle a \rangle$, $M \in \Omega_i$. Тогда $A \cap M = A^m$ для некоторого целого положительного m . Так как a^m — слабо мощный элемент группы G_i , существует целое положительное число l такое, что для любого целого положительного числа n в группе G_i существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $A^m \cap N = A^{mln}$. Пусть $L = M \cap N$. Тогда $L \in \Omega_i$ и $A \cap L = A \cap M \cap N = A^m \cap N = A^{mln}$. Поскольку $L \in \Omega_i \subseteq (U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, то $L = U_i^\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Равенство $A \cap L = A^{mln}$ означает, что элемент a имеет порядок mln по модулю подгруппы U_i^λ . Мы

нашли целое положительное число $k = ml$ такое, что для любого целого положительного числа n существует $\lambda \in \Lambda$ такой, что порядок элемента a по модулю подгруппы U_i^λ равен kn . Иными словами, элемент a является слабо мощным по модулю семейства $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Отсюда по п. 3 теоремы 1 следует, что элемент g является слабо мощным в группе G . Лемма доказана.

Доказываемая теорема 3 утверждает, что для свободного произведения $G = *_{i \in I} G_i(H)$ слабо мощных групп G_i с одной объединенной конечной подгруппой H следующие условия равносильны.

1. Группа G является слабо мощной.
2. Для каждого $i \in I$ в группе G_i существует нормальная подгруппа U_i конечного индекса, тривиально пересекающая H и такая, что индексы $[G_i : U_i]$ ограничены.
3. Группа G финитно аппроксимируема.

Если группа $G = *_{i \in I} G_i(H)$ финитно аппроксимируема, то в ней существует нормальная подгруппа N конечного индекса, тривиально пересекающая конечную подгруппу H , и тогда подгруппы $U_i = G_i \cap N$ удовлетворяют условию 2. Таким образом, имеет место импликация $3 \Rightarrow 2$. Импликация $2 \Rightarrow 1$ обеспечивается леммой 6. Импликация $1 \Rightarrow 3$ очевидна.

6. Доказательство теоремы 4

Лемма 7. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и объединенная подгруппа H является бесконечной циклической с порождающим элементом h . Тогда следующие два условия равносильны.

1. Элемент h является слабо мощным в группе G .
2. Существует целое положительное число m такое, что для любого $i \in I$ и для любого целого положительного числа n в группе G_i существует нормальная подгруппа U_{in} конечного индекса такая, что $H \cap U_{in} = H^{mn}$, и при каждом фиксированном n индексы $[G_i : U_{in}]$ ограничены.

Если множество I конечно, то условия 1 и 2 равносильны следующему условию.

3. Элемент h является слабо мощным в каждом свободном множителе G_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется условие 1, т. е. существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n в группе G существует нормальная подгруппа N_n конечного индекса такая, что $H \cap N_n = H^{mn}$. Тогда подгруппы $U_{in} = G_i \cap N_n$ удовлетворяют всем требованиям из условия 2.

Наоборот, пусть выполняется условие 2. Тогда для произвольного фиксированного целого положительного числа n система $U = (U_{in})_{i \in I}$ нормальна, H -совместима и ограничена. Поэтому группа G_U финитно аппроксимируема. Гомоморфизм $\rho_U : G \rightarrow G_U$ отображает элемент h в элемент $h\rho_U = hU_{in}$ порядка mn . Из последних двух обстоятельств следует, что существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную группу такой, что $|h\rho_U\rho| = |h\rho_U| = mn$. Тем самым доказано выполнение условия 1.

Таким образом, условия 1 и 2 равносильны. Очевидно, что из условия 1 следует условие 3 (даже без дополнительного предположения о конечности множества I). Остается доказать импликацию $3 \Rightarrow 2$ при условии, что множество I конечно.

Пусть множество I конечно и выполняется условие 3, т. е. элемент h является слабо мощным в каждом свободном множителе G_i . Тогда для каждого

$i \in I$ существует целое положительное число m_i такое, что для любого кратного s числа m_i в группе G_i существует нормальная подгруппа конечного индекса, по модулю которой порядок элемента h равен s . Очевидно, что для числа $m = \prod_{i \in I} m_i$ выполняются все требования из условия 2.

Доказанная лемма 7 совпадает с той частью теоремы 4, которая дает критерий слабой мощности элемента h . Аналогично легко доказать и другую часть теоремы 4, дающую критерий мощности элемента h (полагая в доказательстве леммы 7 $m = 1$ и $m_i = 1$).

7. Доказательство теоремы 5

Как отмечалось выше, второе утверждение теоремы 5 является непосредственным следствием из первого утверждения теоремы 5 и теоремы 4. Необходимость в первом утверждении теоремы 5 очевидна, а достаточность обеспечивается следующей леммой.

Лемма 8. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$, все свободные множители G_i являются слабо мощными группами, объединенная подгруппа H является бесконечной циклической группой и H финитно отделима в каждом свободном множителе G_i . Пусть порождающий элемент h группы H является слабо мощным в G . Тогда группа G является слабо мощной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4 существует целое положительное число m такое, что для любого $i \in I$ и для любого целого положительного числа n в группе G_i существует нормальная подгруппа U_{in} конечного индекса такая, что $H \cap U_{in} = H^{mn}$ и при каждом фиксированном n индексы $[G_i : U_{in}]$ ограничены.

Для каждого $i \in I$ обозначим через Φ_i множество всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G_i . Так как группа G_i финитно аппроксимируема и ее подгруппа H финитно отделима, то множество Φ_i является фильтрацией и H -фильтрацией. Обозначим через Ω_i подмножество множества Φ_i , состоящее из всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G_i , по модулю которых порядок элемента h кратен m . Если $T \in \Phi_i$, то $T \cap U_{i1} \in \Omega_i$. Отсюда и из того, что множество Φ_i является фильтрацией и H -фильтрацией, следует, что и множество Ω_i является фильтрацией и H -фильтрацией.

Покажем, что $\Omega_i \subseteq (U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Пусть $W \in \Omega_i$. Тогда W — нормальная подгруппа конечного индекса группы G_i и $|hW| = mn$ для некоторого целого положительного числа n . Очевидно, что система $U = (U_{in})_{i \in I}$ нормальна, H -совместима и ограничена, т. е. $U = U^\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Очевидно также, что если в системе U заменить подгруппу U_{in} на W , то в силу равенства $H \cap U_{in} = H^{mn} = H \cap W$ получится снова нормальная H -совместимая ограниченная система. Поэтому $W \in (U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Из доказанного включения $\Omega_i \subseteq (U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ и из того, что Ω_i является фильтрацией и H -фильтрацией, следует, что и $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией и H -фильтрацией. Поэтому в силу пп. 1, 2 теоремы 1 группа G финитно аппроксимируема и в ней будет слабо мощным любой элемент g , не сопряженный ни в какой свободный множитель G_i .

Теперь для завершения доказательства леммы остается проверить слабую мощность для элемента g бесконечного порядка группы G , сопряженного с элементом a из свободного множителя G_i . Зафиксируем какую-нибудь подгруппу

$W \in \Omega_i$. Заметим, что если X — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G_i , то $X \cap W \in \Omega_i$. Пусть $A = \langle a \rangle$. Тогда $A \cap W = A^w$ для некоторого целого положительного w . Так как a^w — слабо мощный элемент группы G_i , то существует целое положительное число l такое, что для любого целого положительного числа n в группе G_i существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $A^w \cap N = A^{wln}$. Пусть $L = W \cap N$. Тогда $L \in \Omega_i$ и $A \cap L = A \cap W \cap N = A^w \cap N = A^{wln}$. Так как $L \in \Omega_i \subseteq (U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, то $L = U_i^\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Равенство $A \cap L = A^{wln}$ означает, что элемент a имеет порядок wln по модулю подгруппы U_i^λ . Мы нашли целое положительное число $k = wl$ такое, что для любого целого положительного числа n существует $\lambda \in \Lambda$ такой, что порядок элемента a по модулю подгруппы U_i^λ равен kn . Иными словами, элемент a является слабо мощным по модулю семейства $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Отсюда по п. 3 теоремы 1 следует, что элемент g является слабо мощным в группе G . Лемма доказана.

8. Доказательство теоремы 8

Элемент a группы A будем называть p -полным (где p — простое число), если уравнение $x^{p^k} = a$ разрешимо в группе A для любого целого положительного числа k .

Лемма 9. Пусть элемент a бесконечного порядка группы A является слабо мощным. Тогда элемент a не является p -полным ни для какого простого p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p — простое число. По условию леммы существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n существует гомоморфизм группы A на конечную группу, переводящий a в элемент порядка mp . В частности, существует гомоморфизм φ группы A на конечную группу B такой, что $|a\varphi| = mp$. Так как в конечной группе нет p -полных элементов порядка p и $|a^m\varphi| = p$, то элемент $a^m\varphi$ не является p -полным в группе B . Поэтому элемент a^m (а значит, и элемент a) не является p -полным в группе A .

Лемма 10. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и все свободные множители G_i являются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения с ограниченными рангами Гирша. Пусть объединенная подгруппа H является бесконечной циклической группой с порождающим элементом h . Для каждого $i \in I$ обозначим через n_i наибольшее из всех целых положительных n таких, что уравнение $x^n = h$ разрешимо в группе G_i . Пусть Q_G — подгруппа аддитивной группы Q рациональных чисел, порожденная всеми дробями $1/n_i$, где $i \in I$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Элемент h является мощным в группе G .
2. Элемент h является слабо мощным в группе G .
3. Группа Q_G не содержит подгруппу Q_p p -ичных дробей ни для какого простого p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $1 \Rightarrow 2$ очевидна. Импликация $2 \Rightarrow 3$ обеспечивается леммой 9. Остается проверить импликацию $3 \Rightarrow 1$.

Из ограничений, наложенных на группы G_i , следует, что каждая из них обладает нормальным рядом с бесконечными циклическими факторами, причем длины этих рядов ограничены некоторым числом r . Поэтому ступени нильпотентности c_i групп G_i также ограничены этим числом r и для любого целого

положительного числа n индексы степенных подгрупп G_i^n в группах G_i ограничены числом n^r .

Предположим, что выполняется условие 3. Проверка условия 1 сводится к проверке p -мощности элемента h для произвольного простого p , т. е. к доказательству того, что для любого целого положительного числа s существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий h в элемент порядка p^s . Так как $Q_p \not\subseteq Q_G$, то существует целое положительное число k такое, что p^k не делит никакое n_i . Тогда для любого $i \in I$ уравнение $x^{p^k} = h$ не разрешимо в группе G_i , и поэтому в G_i не разрешимо уравнение $x^{p^{k+s}} = h^{p^s}$, откуда по лемме А. И. Мальцева [11, лемма 2] $h^{p^s} \notin G_i^{p^{(k+s)c_i}}$, и так как $c_i \leq r$, то $h^{p^s} \notin G_i^{p^{(k+s)r}}$. Отсюда и из элементарных свойств конечных p -групп следует, что для каждого $i \in I$ в группе G_i существует нормальная подгруппа U_i конечного индекса, содержащая $G_i^{p^{(k+s)r}}$ и такая, что $|hU_i| = p^s$. Тогда система $U = (U_i)_{i \in I}$ нормальна и H -совместима. Более того, система U ограничена, так как

$$[G_i : U_i] \leq [G_i : G_i^{p^{(k+s)r}}] \leq p^{(k+s)r^2}.$$

Поэтому в силу леммы 2 группа G_U финитно аппроксимируема. Гомоморфизм $\rho_U : G \rightarrow G_U$ отображает элемент h в элемент $h\rho_U = hU_i$ порядка p^s . Из последних двух обстоятельств следует, что существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную группу такой, что $|h\rho_U\rho| = |h\rho_U| = p^s$. Тем самым доказана p -мощность (а значит, и мощность) элемента h в группе G . Лемма доказана.

Завершая доказательство теоремы 8, напомним, что конечно порожденные нильпотентные группы являются мощными [12, следствие 1.2], и в них все подгруппы финитно отделимы. Поэтому второе утверждение доказываемой нами теоремы 8 вытекает из теоремы 5 и леммы 10. Первое утверждение теоремы 8 доказано в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Азаров Д. Н. О слабой π -мощности некоторых групп и свободных произведений // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1199–1211.
2. Asri M. S. M., Wong K. B., Wong P. C. Criterion for the weak potency of certain HNN extensions // Math. Slovaca. 2019. V. 69, N 2. P. 381–390.
3. Asri M. S. M., Othman W. A. M., Wong K. B., Wong P. C. Weak potency and cyclic subgroup separability of certain free products and tree products // Bull. Korean Math. Soc. 2023. V. 60, N 5. P. 1375–1390.
4. Wong P. C., Tang C. K., Gan H. W. Weak potency of fundamental groups of graphs of groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2010. V. 33, N 2. P. 243–251.
5. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Am. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
6. Shirvani M. A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag // Proc. Am. Math. Soc. 1988. V. 104, N 3. P. 703–706.
7. Азаров Д. Н., Иванова Е. А. Аппроксимационные свойства свободных произведений конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением // Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. Естественные, общественные науки. 2008. № 2. С. 56–62.
8. Азаров Д. Н. О почти мощности групп автоморфизмов и расщепляемых расширений // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1119–1130.
9. Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 3–13.
10. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
11. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49–60.

-
12. Азаров Д. Н. О π -мощности некоторых разрешимых групп // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 5. С. 771–788.

Поступила в редакцию 9 апреля 2026 г.

После доработки 15 июня 2026 г.

Принята к публикации 31 июля 2026 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
azarovdn@mail.ru