

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С НОРМАЛЬНОЙ ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

Д. Р. Баранов, Е. В. Соколов

Аннотация. Предположим, что $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, фактор-групп и декартовых сплетений, G — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H , нормальной в свободных множителях и содержащейся в них собственным образом. Предположим также, что подгруппа группы автоморфизмов подгруппы H , составленная из ограничений на указанную подгруппу всех внутренних автоморфизмов группы G , конечна или абелева, или порождается ограничениями внутренних автоморфизмов одного из свободных множителей. В настоящей статье найдено описание $\mathcal{C}$ -отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп группы G при условии, что последняя аппроксимируется классом $\mathcal{C}$. При этом критерий $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости группы G известен.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.203

Ключевые слова: отделимость абелевых подгрупп, аппроксимируемость корневыми классами, обобщенное свободное произведение

§ 1. Введение

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп. Следуя А. И. Мальцеву [1], подгруппу Y группы X будем называть $\mathcal{C}$ -отделимой в этой группе, если для любого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$. Отметим, что группа X аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ (или, более коротко, является $\mathcal{C}$ -аппроксимируемой) тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа $\mathcal{C}$ -отделима. Напомним также, что отделимость и аппроксимируемость классом всех конечных групп принято называть *финитной*.

Будем говорить, что класс групп $\mathcal{C}$ является *корневым*, если он содержит хотя бы одну неединичную группу, замкнут относительно взятия подгрупп и удовлетворяет любому из приводимых ниже условий, равносильность которых установлена в [2]:

1) для всякой группы X и для каждого субнормального ряда $1 \leq Z \leq Y \leq X$ из включений $X/Y \in \mathcal{C}$ и $Y/Z \in \mathcal{C}$ следует существование нормальной подгруппы T группы X такой, что $T \leq Z$ и $X/T \in \mathcal{C}$ (*условие Грюнберга*);

2) класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия декартовых сплетений;

3) класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия расширений и вместе с любыми двумя группами X, Y содержит декартово произведение $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00307, <https://rscf.ru/project/24-21-00307/>

Понятие корневого класса впервые появилось в работе [3] и оказалось весьма полезным при изучении аппроксимационных свойств свободных конструкций групп, позволяя систематизировать и усиливать полученные ранее результаты об аппроксимируемости указанных конструкций конкретными корневыми классами групп (см., например, [4–11]). Нетрудно показать, что корневыми являются классы всех конечных групп, конечных p -групп (где p — простое число), периодических $\mathfrak{F}$ -групп конечного периода (где $\mathfrak{F}$ — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп и всех групп без кручения. Легко видеть также, что пересечение произвольного числа корневых классов — снова корневой класс, если оно содержит хотя бы одну неединичную группу.

В [12, 13] Чжоу и Ким показали, что при изучении финитной отделимости конечно порожденных абелевых подгрупп обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп могут использоваться те же методы, что и при исследовании финитной аппроксимируемости. В [14, 15] их результаты распространены на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп $\mathcal{C}$ и фундаментальной группы произвольного графа групп. Предложенный подход позволяет получить критерий $\mathcal{C}$ -отделимости конечно порожденной абелевой подгруппы практически для любой свободной конструкции, аппроксимируемость которой классом $\mathcal{C}$ была установлена ранее. В [15] приводятся несколько примеров его применения к изучению отделимости подгрупп фундаментальных групп графов групп с центральными реберными подгруппами. Настоящая статья продолжает данное направление исследований и использует указанный подход для описания отделимых подгрупп обобщенного свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой, нормальной в свободных множителях.

Всюду далее запись $G = \langle A * B; H \rangle$ будет означать, что G — обобщенное свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H . Отметим, что если $A = H$ или $B = H$, то группа G совпадает с одним из свободных множителей A , B и потому данный случай можно считать вырожденным. Будем говорить, что группа G удовлетворяет условию (α) , если $A \neq H \neq B$ и подгруппа H нормальна в группах A и B . Аппроксимируемость такого обобщенного свободного произведения различными классами групп изучалась в [6, 16–27]. В ряде случаев необходимыми и достаточными условиями его $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости служат $\mathcal{C}$ -аппроксимируемость групп A , B и $\mathcal{C}$ -отделимость в них подгруппы H (см., например, [23, теорема 1; 24, теорема 1; 25, теорема 1; 27, теорема 2]). В формулировках условий аппроксимируемости группы G конечными p -группами встречается также подгруппа $H^p H'$, где $H^p = \text{sgp}\{h^p \mid h \in H\}$ и H' — коммутант группы H [18, 27]. Однако наиболее универсальным и продуктивным подходом к исследованию аппроксимируемости рассматриваемого обобщенного свободного произведения является использование описанной ниже группы автоморфизмов подгруппы H , индуцированных внутренними автоморфизмами группы G .

Заметим, что если X — некоторая группа и Y — ее нормальная подгруппа, то ограничение на последнюю любого внутреннего автоморфизма группы X оказывается автоморфизмом подгруппы Y . Множество всех таких автоморфизмов образует группу, обозначаемую далее через $\text{Aut}_X(Y)$. Если подгруппа H нормальна в группах A и B , то она нормальна и в группе G , что позволяет определить группу $\text{Aut}_G(H)$. Идея использования свойств последней для описания условий аппроксимируемости группы G впервые была предложена в [17] и затем успешно применялась в [6, 21, 22, 26, 27]. В частности, в [6, 26] был полу-

чен критерий аппроксимируемости гомоморфно замкнутым корневым классом групп $\mathcal{C}$ обобщенного свободного произведения $G = \langle A * B; H \rangle$, удовлетворяющего условию (α) и хотя бы одному из следующих дополнительных условий:

- (β) группа $\text{Aut}_G(H)$ конечна;
- (γ) группа $\text{Aut}_G(H)$ абелева;
- (δ) группа $\text{Aut}_G(H)$ совпадает с группой $\text{Aut}_A(H)$ или с группой $\text{Aut}_B(H)$.

Целью настоящей статьи является описание $\mathcal{C}$ -отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп группы G , удовлетворяющей условиям упомянутого критерия.

§ 2. Формулировка полученных результатов

Пусть X — некоторая группа и $\mathfrak{S}$ — семейство нормальных подгрупп группы X . Будем говорить, что подгруппа Y группы X *отделима семейством* $\mathfrak{S}$, если $\bigcap_{N \in \mathfrak{S}} YN = Y$. Всюду далее, если $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп, то через $\mathcal{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X , фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$. Поскольку подгруппы семейства $\mathcal{C}^*(X)$ — это ядра всевозможных гомоморфизмов группы X на группы из класса $\mathcal{C}$, подгруппа Y группы X $\mathcal{C}$ -отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она отделима семейством $\mathcal{C}^*(X)$. В частности, группа X $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда семейством $\mathcal{C}^*(X)$ отделима ее единичная подгруппа.

Если $G = \langle A * B; H \rangle$, то через $\mathcal{C}^+(A, B)$ будем обозначать семейство пар подгрупп группы G , определенное следующим образом: $(R, S) \in \mathcal{C}^+(A, B)$ тогда и только тогда, когда $R \in \mathcal{C}^*(A)$, $S \in \mathcal{C}^*(B)$ и $R \cap H = S \cap H$. Положим также

$$\mathcal{C}^+(A) = \{R \mid (R, S) \in \mathcal{C}^+(A, B)\} \quad \text{и} \quad \mathcal{C}^+(B) = \{S \mid (R, S) \in \mathcal{C}^+(A, B)\}.$$

Упомянутый в конце предыдущего параграфа критерий аппроксимируемости группы G выглядит следующим образом.

Теорема 1. Пусть группа $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) – (δ) , $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. [6, теорема 2] Если выполняется условие (β) , то группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда

- (a) единичная подгруппа отделима семействами $\mathcal{C}^+(A)$ и $\mathcal{C}^+(B)$;
- (b) подгруппа H $\mathcal{C}$ -отделима в группах A и B ;
- (c) $\text{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$.

2. [26, теорема 1] Если выполняется условие (γ) или условие (δ) , то группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда справедливы утверждения (a) и (b).

Перейдем к описанию отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп обобщенного свободного произведения, удовлетворяющего условиям теоремы 1.

Если $\mathcal{C}$ — класс групп, состоящий из периодических групп, то через $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{C}$. В случае, когда класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, положим $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ равным множеству всех простых чисел. Будем говорить, что подгруппа Y группы X $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолирована в этой группе, если для любого

элемента $x \in X$ и для любого простого числа $q \notin \mathfrak{P}(\mathcal{C})$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

Очевидно, что если множество $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ содержит все простые числа, то любая подгруппа оказывается $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированной. В противном случае нетрудно показать (см., например, [28, предложение 5]), что если подгруппа Y $\mathcal{C}$ -отделима в группе X , то она $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолирована в этой группе. Как следствие, свойство $\mathcal{C}$ -отделимости имеет смысл изучать лишь в отношении $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированных подгрупп. В связи с этим соображением и с характером интересующих нас подгрупп $\mathcal{C}$ -дефектом группы X будем называть семейство всех $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированных конечно порожденных абелевых подгрупп данной группы, не являющихся $\mathcal{C}$ -отделимыми в X .

Понятно, что задача поиска критерия $\mathcal{C}$ -отделимости конечно порожденной абелевой подгруппы группы $G = \langle A * B; H \rangle$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, сводится к описанию $\mathcal{C}$ -дефекта данной группы. При этом идеальной можно считать ситуацию, когда для такого описания достаточно знать лишь $\mathcal{C}$ -дефекты свободных множителей A и B . К сожалению, в общем случае (теорема 2 ниже) выполнения последнего требования добиться не удалось. Однако при некоторых дополнительных предположениях получено именно идеальное решение (см. теоремы 3–5).

Пусть (X, Y) — пара конечно порожденных абелевых подгрупп группы G и символ Z обозначает один из свободных множителей A, B . Рассмотрим следующий набор условий.

$(\lambda_{\mathcal{C}}^{1,Z})$ X — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированная подгруппа группы Z , не являющаяся $\mathcal{C}$ -отделимой в этой группе (и, следовательно, принадлежащая ее $\mathcal{C}$ -дефекту); $Y = 1$.

$(\mu_{\mathcal{C}}^{1,Z})$ X — подгруппа группы H , $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированная в группе Z , но не являющаяся $\mathcal{C}$ -отделимой в этой группе (и, следовательно, принадлежащая ее $\mathcal{C}$ -дефекту); Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap Z = 1$ и $[X, Y] = 1$.

$(\lambda_{\mathcal{C}}^{2,Z})$ X — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированная подгруппа группы Z , не являющаяся отделимой в этой группе семейством $\mathcal{C}^+(Z)$; $Y = 1$.

$(\mu_{\mathcal{C}}^{2,Z})$ X — подгруппа группы H , $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированная в группе Z , но не являющаяся отделимой семейством $\mathcal{C}^+(Z)$; Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap Z = 1$ и $[X, Y] = 1$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_{\mathcal{C}}^k(G)$, $k = \overline{1, 2}$, семейство всех пар конечно порожденных абелевых подгрупп группы G , удовлетворяющих хотя бы одному из условий $(\lambda_{\mathcal{C}}^{k,A})$, $(\lambda_{\mathcal{C}}^{k,B})$, $(\mu_{\mathcal{C}}^{k,A})$, $(\mu_{\mathcal{C}}^{k,B})$, и положим $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^k(G) = \{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}_{\mathcal{C}}^k(G)\}$.

Известно (см. [29, теорема 2] и [14, предложение 5]), что произвольная конечно порожденная абелева подгруппа группы G сопряжена либо с подгруппой одного из свободных множителей A, B , либо с прямым произведением подгрупп X и Y , где $X \leq H$ и Y — бесконечная циклическая подгруппа, тривиально пересекающаяся с A и с B . Поэтому для задания семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^1(G)$, помимо умения строить конечно порожденные абелевы подгруппы группы G , достаточно знать описания $\mathcal{C}$ -дефектов групп A и B . Определения семейств $\mathcal{C}^+(A, B)$ и $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^2(G)$ сложнее: они зависят не только от свойств групп A и B , но и от того, как данные группы склеиваются при построении обобщенного свободного произведения. При этом из включений $\mathcal{C}^+(A) \subseteq \mathcal{C}^*(A)$, $\mathcal{C}^+(B) \subseteq \mathcal{C}^*(B)$ следует, что $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^1(G) \subseteq \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^2(G)$.

Общее решение рассматриваемой задачи дает

Теорема 2. Пусть группа $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) – (δ) , $\mathcal{C}$ — корневой класс групп,

замкнутый относительно взятия фактор-групп. Если группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, то ее $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированная конечно порожденная абелева подгруппа является $\mathcal{C}$ -дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^2(G)$.

Приводимые далее теоремы 3–5 указывают некоторые частные случаи, в которых описание $\mathcal{C}$ -дефекта обобщенного свободного произведения G можно дать с использованием семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^1(G)$. Отметим, что содержащиеся в этих теоремах критерии $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости группы G являются нетривиальными следствиями теоремы 1 и потому представляют самостоятельный интерес.

Теорема 3. Пусть группа $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) – (δ) , $\mathcal{C}$ — корневого класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также группы A и B $\mathcal{C}$ -аппроксимируемы, $A/H \in \mathcal{C}$ и $B/H \in \mathcal{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если выполняется условие (β) , то группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\text{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$.

2. Если выполняется условие (γ) или условие (δ) , то группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема.

3. Если группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, то $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированная конечно порожденная абелева подгруппа этой группы является $\mathcal{C}$ -дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^1(G)$. В частности, группа G не имеет $\mathcal{C}$ -дефекта, если она $\mathcal{C}$ -аппроксимируема и $\mathcal{C}$ -дефекта нет в группах A и B .

Непосредственно из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. Пусть группа $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) – (δ) . Если подгруппа H имеет конечные индексы в группах A и B , то справедливы следующие утверждения.

1. Если группы A и B финитно аппроксимируемы, то и группа G финитно аппроксимируема.

2. Если в группах A и B все конечно порожденные абелевы подгруппы финитно отделимы, то и в группе G все конечно порожденные абелевы подгруппы финитно отделимы.

Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, состоящий из периодических групп. Следуя [30], будем говорить, что

1) абелева группа $\mathcal{C}$ -ограничена, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая некоторому числу из множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$, имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой группы из класса $\mathcal{C}$;

2) разрешимая (нильпотентная) группа $\mathcal{C}$ -ограничена, если она обладает конечным субнормальным (соответственно центральным) рядом с $\mathcal{C}$ -ограниченными абелевыми факторами.

Будем говорить также, что

1) абелева группа *сильно* $\mathcal{C}$ -ограничена, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая некоторому числу из множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$, конечна;

2) разрешимая (нильпотентная) группа *сильно* $\mathcal{C}$ -ограничена, если она обладает конечным субнормальным (соответственно центральным) рядом с *сильно* $\mathcal{C}$ -ограниченными абелевыми факторами.

Отметим, что при любом выборе класса групп $\mathcal{C}$ каждая конечно порожденная абелева группа оказывается сильно $\mathcal{C}$ -ограниченной. Поэтому все конечно порожденные нильпотентные группы являются сильно $\mathcal{C}$ -ограниченными нильпотентными, а все полициклические группы — сильно $\mathcal{C}$ -ограниченными разрешимыми.

Как обычно, целое число будем называть $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ -числом, если все его простые делители принадлежат множеству $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$. Через $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ будем обозначать дополнение множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ в множестве всех простых чисел.

Теорема 4. Пусть группа $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) – (δ) , $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также группы A и B $\mathcal{C}$ -аппроксимируемы, подгруппа H является сильно $\mathcal{C}$ -ограниченной разрешимой и каждая ее нормальная подгруппа конечного $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ -индекса $\mathcal{C}$ -отделима в группах A и B . Тогда справедливы утверждения 1–3 теоремы 3.

Согласно предложению 5 из [31] если $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, то понятия $\mathcal{F}$ -ограниченной и сильно $\mathcal{F}$ -ограниченной разрешимой группы совпадают с понятием разрешимой группы, ограниченной в смысле А. И. Мальцева [1]. Поэтому из теоремы 4 вытекает

Следствие 2. Пусть группа $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) – (δ) . Пусть также подгруппа H является ограниченной разрешимой в смысле А. И. Мальцева и каждая ее нормальная подгруппа конечного индекса финитно отделима в группах A и B . Тогда справедливы утверждения 1 и 2 следствия 1.

Теорема 5. Пусть группа $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) – (δ) , $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также $\mathcal{N}$ — класс $\mathcal{C}$ -ограниченных нильпотентных групп без $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -кручения, группы A и B $\mathcal{N}$ -аппроксимируемы и обладают гомоморфизмами на $\mathcal{N}$ -группы, действующими инъективно на подгруппе H . Тогда справедливы приводимые ниже утверждения 1 и 2, а также утверждение 3 теоремы 3.

1. Если выполняется условие (β) , то группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\text{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$ и подгруппа H $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолирована в группах A и B .

2. Если выполняется условие (γ) или условие (δ) , то группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолирована в группах A и B .

Следствие 3. Пусть группа $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) – (δ) , $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также A и B — $\mathcal{C}$ -ограниченные нильпотентные группы. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если выполняется условие (β) , то группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\text{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$ и подгруппы 1 и H $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированы в группах A и B .

2. Если выполняется условие (γ) или условие (δ) , то группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы 1 и $H \mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированы в группах A и B .

3. Если группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, то она не имеет $\mathcal{C}$ -дефекта.

Говорят (см., например, [32]), что группа имеет *конечный ранг Гирша* — *Зайцева*, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой.

Следствие 4. Пусть группа $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β) – (δ) , $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также $\mathcal{M}_0$ — класс $\mathcal{C}$ -ограниченных нильпотентных групп без кручения, группы A и B $\mathcal{M}_0$ -аппроксимируемы и подгруппа H имеет конечный ранг Гирша — Зайцева. Тогда выполняются утверждения 1 и 2 теоремы 5 и утверждение 3 следствия 3.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теорем 2–5 и следствий 3, 4.

§ 3. Некоторые вспомогательные утверждения

Предложение 3.1 [27, предложение 3.1]. Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — некоторая группа, Y и Z — подгруппы группы X . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $Y \in \mathcal{C}^*(X)$, то $Y \cap Z \in \mathcal{C}^*(Z)$. Как следствие, если группа X аппроксимируется классом $\mathcal{C}$, то и подгруппа Z является $\mathcal{C}$ -аппроксимируемой.

2. Если $Y, Z \in \mathcal{C}^*(X)$, то $Y \cap Z \in \mathcal{C}^*(X)$.

Предложение 3.2 [6, предложение 18]. Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathcal{C}$ -аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X , имеющая конечный ранг Гирша — Зайцева. Тогда существует подгруппа $Z \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$.

Предложение 3.3 [26, предложение 17]. Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп. Тогда произвольная группа из класса $\mathcal{C}$ имеет конечный период.

Предложение 3.4 [33, предложение 8]. Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп. Конечная разрешимая группа принадлежит классу $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда ее порядок является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ -числом.

Отметим, что разрешимая (абелева) группа сильно $\mathcal{C}$ -ограничена тогда и только тогда, когда она является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ -ограниченной разрешимой (соответственно абелевой) в смысле определения, данного в [31]. Поэтому из предложений 2 и 3 указанной работы вытекает

Предложение 3.5. Если $\mathcal{C}$ — класс групп, состоящий из периодических групп, то справедливы следующие утверждения.

1. Класс сильно $\mathcal{C}$ -ограниченных разрешимых групп замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов.

2. Если сильно $\mathcal{C}$ -ограниченная разрешимая группа является абелевой, то она принадлежит классу сильно $\mathcal{C}$ -ограниченных абелевых групп.

Ввиду отмеченной выше равносильности определений приводимое далее утверждение совпадает с предложением 18 из [26].

Предложение 3.6. Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Тогда произвольная сильно $\mathcal{C}$ -ограниченная разрешимая группа, принадлежащая классу $\mathcal{C}$, конечна.

Предложение 3.7. Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и X — сильно $\mathcal{C}$ -ограниченная разрешимая $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ -группа конечного периода. Тогда группа X конечна и принадлежит классу $\mathcal{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y — произвольный фактор некоторого нормального разрешимого ряда группы X . Тогда Y — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ -группа конечного периода, являющаяся сильно $\mathcal{C}$ -ограниченной абелевой в силу предложения 3.5. Ввиду конечности периода количество примарных компонент группы Y конечно. Каждая из этих компонент соответствует некоторому числу из множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ и потому конечна. Следовательно, группа Y (а вместе с ней и группа X) также конечна. Принадлежность группы X классу $\mathcal{C}$ вытекает из предложения 3.4.

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп. Будем говорить, что группа X $\mathcal{C}$ -квазирегулярна по своей подгруппе Y , если для любой подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y \leq M$.

Предложение 3.8. Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, X — некоторая группа, Y — подгруппа группы X . Тогда группа X $\mathcal{C}$ -квазирегулярна по подгруппе Y , если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- (1) $Y \in \mathcal{C}^*(X)$;
- (2) все подгруппы семейства $\mathcal{C}^*(Y)$ $\mathcal{C}$ -отделимы в группе X и имеют конечные индексы в группе Y ;
- (3) класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп и замкнут относительно взятия фактор-групп, Y — сильно $\mathcal{C}$ -ограниченная разрешимая группа и каждая нормальная подгруппа группы Y конечного $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ -индекса $\mathcal{C}$ -отделима в группе X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполняется условие (1), $\mathcal{C}$ -квазирегулярность X по Y вытекает из условия Грюнберга. Пусть имеет место условие (2), $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ и $\{1, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ — некоторая полная система представителей смежных классов группы Y по подгруппе M . Так как последняя $\mathcal{C}$ -отделима в группе X и множество $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq X \setminus M$ конечно, то, пользуясь утверждением 2 предложения 3.1, можно найти подгруппу $N \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющую условию $y_1, \dots, y_n \notin MN$. Если $N \cap Y \not\leq M$ и $y \in (N \cap Y) \setminus M$, то $y = xy_i$ для подходящих $x \in M$, $i \in \{1, \dots, n\}$ и $y_i = x^{-1}y \in MN$ вопреки выбору подгруппы N . Следовательно, $N \cap Y \leq M$ и $\mathcal{C}$ -квазирегулярность X по Y имеет место.

Пусть выполняется условие (3). Если $M \in \mathcal{C}^*(Y)$, то согласно предложениям 3.5 и 3.6 фактор-группа Y/M оказывается сильно $\mathcal{C}$ -ограниченной разрешимой и, следовательно, конечной. Очевидно также, что ее порядок является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ -числом и потому подгруппа M $\mathcal{C}$ -отделима в группе X . Стало быть, имеет место условие (2), которое и гарантирует $\mathcal{C}$ -квазирегулярность X по Y .

Следующие два утверждения вытекают из теоремы 2.4 и предложений 5.2, 6.1, 6.3 работы [30].

Предложение 3.9. Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, $\mathcal{N}$ — класс $\mathcal{C}$ -ограниченных нильпотентных групп без $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -кручения, X — некоторая группа и Y — ее $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированная подгруппа. Если группа X $\mathcal{N}$ -аппроксимируема и обладает гомоморфизмом на $\mathcal{N}$ -группу, действующим инъективно на подгруппе Y , то она $\mathcal{C}$ -аппроксимируема и $\mathcal{C}$ -квазирегулярна по подгруппе Y , а последняя $\mathcal{C}$ -отделима в группе X .

Предложение 3.10. Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Класс $\mathcal{C}$ -ограниченных нильпотентных групп замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений конечного числа сомножителей.
2. Если периодическая $\mathcal{C}$ -ограниченная нильпотентная группа имеет конечный период, являющийся $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ -числом, то она принадлежит классу $\mathcal{C}$.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Всюду далее, если $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп, X — группа и Y — подгруппа группы X , то через $\mathcal{C}^*(X, Y)$ будем обозначать семейство подгрупп $\{N \cap Y \mid N \in \mathcal{C}^*(X)\}$.

Предложение 4.1 [6, предложение 10]. Если $\mathcal{C}$ — корневой класс групп и группа $G = \langle A * B; H \rangle$ $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, то ее единичная подгруппа отделима семействами $\mathcal{C}^*(G, A)$ и $\mathcal{C}^*(G, B)$.

Как и выше, обозначим через $\mathfrak{D}_{\mathcal{C}}^3(G)$ семейство всех пар конечно порожденных абелевых подгрупп группы $G = \langle A * B; H \rangle$, удовлетворяющих хотя бы одному из определенных далее условий $(\lambda_{\mathcal{C}}^{3,Z})$, $(\mu_{\mathcal{C}}^{3,Z})$, где $Z = A$ или $Z = B$, и положим $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^3(G) = \{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}_{\mathcal{C}}^3(G)\}$.

$(\lambda_{\mathcal{C}}^{3,Z})$ X — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированная подгруппа группы Z , не являющаяся отделимой семейством $\mathcal{C}^*(G, Z)$; $Y = 1$.

$(\mu_{\mathcal{C}}^{3,Z})$ X — подгруппа группы H , $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированная в группе Z , но не являющаяся отделимой семейством $\mathcal{C}^*(G, Z)$; Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap Z = 1$ и $[X, Y] = 1$.

Следующее предложение объединяет в себе частные случаи теорем 2.2 и 2.3 из [15].

Предложение 4.2. Пусть $G = \langle A * B; H \rangle$ и $\mathcal{C}$ — корневой класс групп. Тогда справедливы приводимые далее утверждения.

1. Если подгруппы 1 и H отделимы семействами $\mathcal{C}^*(G, A)$ и $\mathcal{C}^*(G, B)$, то группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, а ее $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированная конечно порожденная абелева подгруппа является $\mathcal{C}$ -дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^3(G)$.

2. Пусть группы A и B $\mathcal{C}$ -аппроксимируемы, подгруппа H $\mathcal{C}$ -отделима в этих группах и группа G $\mathcal{C}$ -квазирегулярна по подгруппам A и B . При таких предположениях группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, а ее $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированная конечно порожденная абелева подгруппа является $\mathcal{C}$ -дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^1(G)$. В частности, группа G не имеет $\mathcal{C}$ -дефекта, если тем же свойством обладают группы A и B .

Предложение 4.3 [6, предложение 11]. Пусть группа $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и фактор-групп. Тогда подгруппа H $\mathcal{C}$ -отделима в группе A (в группе B) тогда и только тогда, когда она отделима семейством $\mathcal{C}^*(G, A)$ (соответственно семейством $\mathcal{C}^*(G, B)$).

Предложение 4.4 [26, предложение 12]. Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, группа $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из следующих дополнительных условий:

- (γ) группа $\text{Aut}_G(H)$ абелева;
- (δ) группа $\text{Aut}_G(H)$ совпадает с группой $\text{Aut}_A(H)$ или с группой $\text{Aut}_B(H)$;
- (ε) группа $\text{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{C}$.

Если $\mathcal{C}^+(A)$ и $\mathcal{C}^+(B)$ — семейства подгрупп группы G , определенные в § 2, то $\mathcal{C}^*(G, A) = \mathcal{C}^+(A)$ и $\mathcal{C}^*(G, B) = \mathcal{C}^+(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Согласно теореме 1 подгруппа H $\mathcal{C}$ -отделима в группах A и B . Ввиду предложения 4.3 это равносильно ее отделимости семействами $\mathcal{C}^*(G, A)$ и $\mathcal{C}^*(G, B)$. В силу предложения 4.1 теми же семействами отделима единичная подгруппа группы G . Если выполняется условие (β) , то по теореме 1 справедливо включение $\text{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$. Поэтому можно воспользоваться предложением 4.4, согласно которому $\mathcal{C}^*(G, A) = \mathcal{C}^+(A)$ и $\mathcal{C}^*(G, B) = \mathcal{C}^+(B)$. Отсюда $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^3(G) = \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^2(G)$ и, следовательно, доказываемая теорема вытекает из утверждения 1 предложения 4.2.

§ 5. Доказательства теорем 3–5 и следствий 3, 4

Приводимое далее утверждение отмечено без доказательства в [34] и может быть легко проверено индукцией по k .

Предложение 5.1. Пусть $\{v_k(x, y) \mid k \geq 1\}$ — множество слов в (групповом) алфавите $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$, $v_1(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$ и при $k \geq 2$ слово $v_k(x, y)$ получается из слова $x^{-1}v_{k-1}(x, y)^{-1}xv_{k-1}(x, y)$ путем удаления подслова xx^{-1} . Тогда для каждого $k \geq 1$ слово $v_k(x, y)$ имеет длину 2^{k+1} , начинается на $x^{-1}y^{-1}$, заканчивается на xy и не содержит подслов вида $x^\xi x^\zeta$ или $y^\xi y^\zeta$, где $\xi, \zeta = \pm 1$.

Напомним, что запись элемента g группы $G = \langle A * B; H \rangle$ в виде произведения $g_1 g_2 \dots g_n$, где $g_1, g_2, \dots, g_n \in A \cup B$, называется *несократимой*, если никакие два соседних сомножителя этого произведения не лежат одновременно в A или в B . Число n называют *длиной* данной несократимой записи. Теорема о нормальной форме для обобщенных свободных произведений (см., например, [35, глава IV, теорема 2.6]) утверждает, что если элемент $g \in G$ обладает несократимой записью неединичной длины, то он отличен от 1.

Предложение 5.2. Пусть группа $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) , $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, и подгруппа H нильпотентна. Если группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, то подгруппа H $\mathcal{C}$ -отделима в группах A и B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что подгруппа H не является $\mathcal{C}$ -отделимой в группе A . Тогда существует элемент $a \in A \setminus H$ такой, что $a\sigma \in H\sigma$ при любом гомоморфизме σ группы A на группу из класса $\mathcal{C}$. Пользуясь условием $H \neq B$, выберем некоторый элемент $b \in B \setminus H$ и положим $g = v_c(a, b^{-1}ab)$, где c — ступень нильпотентности подгруппы H и $v_c(x, y)$ — слово из предложения 5.1. Согласно указанному предложению элемент g имеет несократимую

запись неединичной длины и, следовательно, отличен от 1. Вместе с тем, если σ — произвольный гомоморфизм группы G на $\mathcal{C}$ -группу, то $a\sigma \in H\sigma$ ввиду выбора элемента a и замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп, $(b^{-1}ab)\sigma \in H\sigma$ в силу нормальности подгруппы H в группе B и $g\sigma = 1$, поскольку элемент $v_c(a, b^{-1}ab)\sigma$ принадлежит $(c+1)$ -му члену нижнего центрального ряда группы $H\sigma$, а c — степень нильпотентности группы H . Таким образом, группа G не является $\mathcal{C}$ -аппроксимируемой вопреки условию предложения. $\mathcal{C}$ -отделимость подгруппы H в группе B доказывается аналогично.

Предложение 5.3. Пусть выполняются условия предложения 4.4. Если группы A и B $\mathcal{C}$ -квазирегулярны по подгруппе H и каждая подгруппа семейства $\mathcal{C}^*(H)$ содержит подгруппу того же семейства, нормальную в G , то группа G $\mathcal{C}$ -квазирегулярна по подгруппам A и B .

Доказательство. Пусть $L \in \mathcal{C}^*(A)$, $M \in \mathcal{C}^*(B)$ и $P = L \cap M \cap H$. Для завершения доказательства достаточно найти подгруппу $N \in \mathcal{C}^*(G)$ такую, что $N \cap A \leq L$ и $N \cap B \leq M$. Согласно предложению 3.1

$$L \cap H \in \mathcal{C}^*(H), \quad M \cap H \in \mathcal{C}^*(H) \quad \text{и} \quad P = (L \cap H) \cap (M \cap H) \in \mathcal{C}^*(H).$$

По условию настоящего предложения существует подгруппа $Q \in \mathcal{C}^*(H)$, лежащая в P и нормальная в G . Пользуясь $\mathcal{C}$ -квазирегулярностью групп A и B по подгруппе H , найдем подгруппы $U \in \mathcal{C}^*(A)$ и $V \in \mathcal{C}^*(B)$, удовлетворяющие соотношениям $U \cap H \leq Q$ и $V \cap H \leq Q$. Положим $R = QU \cap L$ и $S = QV \cap M$. Так как $A/U \in \mathcal{C}$, $B/V \in \mathcal{C}$ и класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия факторгрупп, то $A/QU \cong (A/U)/(QU/U) \in \mathcal{C}$ и $B/QV \cong (B/V)/(QV/V) \in \mathcal{C}$. Отсюда ввиду предложения 3.1 получаем, что $R \in \mathcal{C}^*(A)$ и $S \in \mathcal{C}^*(B)$. Из соотношений $U \cap H \leq Q$ и $V \cap H \leq Q$ легко следует, что $QU \cap H = Q = QV \cap H$. Так как $Q \leq P \leq L \cap M$, то $R \cap H = Q = S \cap H$ и, стало быть, $R \in \mathcal{C}^+(A)$, $S \in \mathcal{C}^+(B)$. В силу предложения 4.4 $R \in \mathcal{C}^*(G, A)$ и $S \in \mathcal{C}^*(G, B)$, т. е. существуют подгруппы $N_1, N_2 \in \mathcal{C}^*(G)$, удовлетворяющие соотношениям $N_1 \cap A = R$ и $N_2 \cap B = S$. Положим $N = N_1 \cap N_2$. Тогда $N \in \mathcal{C}^*(G)$ в силу предложения 3.1, $N \cap A \leq R \leq L$ и $N \cap B \leq S \leq M$. Следовательно, подгруппа N искомая.

Предложение 5.4. Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, обобщенное свободное произведение $G = \langle A * B; H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из следующих дополнительных условий:

- (1) группа $\text{Aut}_G(H)$ конечна или принадлежит классу $\mathcal{C}$;
- (2) $\text{Aut}_G(H) = \text{Aut}_A(H)$ и группа A $\mathcal{C}$ -квазирегулярна по подгруппе H ;
- (3) группа $\text{Aut}_G(H)$ является абелевой, $H \in \mathcal{C}^*(B)$ и группа A $\mathcal{C}$ -квазирегулярна по подгруппе H ;
- (4) класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп и подгруппа H является $\mathcal{C}$ -ограниченной нильпотентной или сильно $\mathcal{C}$ -ограниченной разрешимой.

Тогда каждая подгруппа семейства $\mathcal{C}^*(H)$ содержит подгруппу того же семейства, нормальную в G .

Доказательство. Пусть $M \in \mathcal{C}^*(H)$. Построение искомой подгруппы проведем отдельно для каждого из дополнительных условий (1)–(4).

- (1) Положим $N = \bigcap_{\theta \in \text{Aut}_G(H)} M\theta$. Согласно определению группы $\text{Aut}_G(H)$

подгруппа N совпадает с пересечением $\bigcap_{g \in G} g^{-1}Mg$ и потому нормальна в группе G .

По теореме Ремака (см., например, [36, теорема 4.3.9]) факторгруппа H/N вкладывается в декартово произведение групп $H/M\theta$, каждая из которых изоморфна $\mathcal{C}$ -группе H/M . Указанное декартово произведение, а вместе

с ним и группа H/N принадлежат классу $\mathcal{C}$ ввиду замкнутости последнего относительно взятия подгрупп и а) расширений, если группа $\text{Aut}_G(H)$ конечна; б) декартовых степеней указанного в определении корневого класса вида, если $\text{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$. Таким образом, подгруппа N является искомой.

(2) Ввиду $\mathcal{C}$ -квазирегулярности группы A по подгруппе H найдется подгруппа $L \in \mathcal{C}^*(A)$, удовлетворяющая условию $L \cap H \leq M$. Положим $N = L \cap H$. Тогда подгруппа N нормальна в группе A и принадлежит семейству $\mathcal{C}^*(H)$ в силу предложения 3.1. Так как $\text{Aut}_G(H) = \text{Aut}_A(H)$, то указанная подгруппа оказывается нормальной в группе G и, следовательно, является искомой.

(3) Как и выше, воспользуемся $\mathcal{C}$ -квазирегулярностью группы A по подгруппе H , найдем подгруппу $L \in \mathcal{C}^*(A)$, удовлетворяющую условию $L \cap H \leq M$, и положим $Q = L \cap H$, $N = \bigcap_{\theta \in \text{Aut}_G(H)} Q\theta$. Тогда подгруппа Q нормальна в груп-

пе A , подгруппа N нормальна в группе G , $Q \in \mathcal{C}^*(H)$ и $N \leq M$. Пусть $\{b_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ — некоторая полная система представителей смежных классов группы B по подгруппе H . Поскольку группа $\text{Aut}_G(H)$ абелева, любой ее элемент совпадает с ограничением на подгруппу H внутреннего автоморфизма, производимого элементом вида ab , где $a \in A$, $b \in B$. Понятно, что каждое такое произведение можно переписать в виде cb_i для подходящих $c \in A$, $i \in \mathcal{I}$. Поэтому

$$N = \bigcap_{i \in \mathcal{I}, c \in A} b_i^{-1} c^{-1} Q c b_i = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} b_i^{-1} Q b_i$$

и фактор-группа H/N вкладывается в декартово произведение групп $H/b_i^{-1} Q b_i$, изоморфных $\mathcal{C}$ -группе H/Q . Так как множество $\mathcal{I}$ равномощно $\mathcal{C}$ -группе B/H , группа H/N содержится в классе $\mathcal{C}$ ввиду замкнутости последнего относительно взятия подгрупп и декартовых степеней. Следовательно, N — искомая подгруппа.

(4) Согласно предложению 3.3 $\mathcal{C}$ -группа H/M имеет конечный период q , являющийся, очевидно, $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ -числом. Положим $N = \text{sgp}\{h^q \mid h \in H\}$. Тогда подгруппа N содержится в M и нормальна в G , а фактор-группа H/N имеет период q . Если подгруппа H является $\mathcal{C}$ -ограниченной нильпотентной, то в силу предложения 3.10 группа H/N принадлежит классу $\mathcal{C}$. В случае, когда H — сильно $\mathcal{C}$ -ограниченная разрешимая группа, аналогичное утверждение вытекает из предложений 3.5 и 3.7. Следовательно, подгруппа N искомая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 3 и 4. Необходимость условия $\text{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$ для $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости группы G в утверждении 1 каждой из теорем 3, 4 обеспечивается теоремой 1. Докажем одновременно утверждения 2, 3 и достаточность в утверждении 1. Согласно предложению 3.8 группы A и B $\mathcal{C}$ -квазирегулярны по подгруппе H . Поэтому в силу предложения 5.4 каждая подгруппа семейства $\mathcal{C}^*(H)$ содержит подгруппу того же семейства, нормальную в G . Из предложения 5.3 теперь следует, что группа G $\mathcal{C}$ -квазирегулярна по свободным множителям A и B . $\mathcal{C}$ -отделимость подгруппы H в тех же сомножителях гарантируется либо включениями $A/H, B/H \in \mathcal{C}$ (в случае теоремы 3), либо условием теоремы (в случае теоремы 4). Таким образом, $\mathcal{C}$ -аппроксимируемость группы G и утверждение 3 следуют из утверждения 2 предложения 4.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Заметим, что в силу предложения 3.9 группы A и B $\mathcal{C}$ -аппроксимируемы, а условие $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированности подгруппы H в этих группах равносильно требованию ее $\mathcal{C}$ -отделимости. Из вложимости подгруппы H в $\mathcal{N}$ -группу и предложения 3.10 следует, что указанная подгруппа яв-

ляется $\mathcal{C}$ -ограниченной нильпотентной. Поэтому ее $\mathcal{C}$ -отделимость в группах A и B необходима для $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости группы G в силу предложения 5.2. Как и выше, необходимость условия $\text{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$ в утверждении 1 обеспечивается теоремой 1. Для проверки утверждения 3 и достаточности в утверждениях 1 и 2 можно воспользоваться в точности теми же рассуждениями, что и при доказательстве теорем 3 и 4, с той лишь разницей, что вместо предложения 3.8 нужно сослаться на предложение 3.9, а $\mathcal{C}$ -отделимость подгруппы H в группах A и B гарантируется условием теоремы 5 и сделанным в начале доказательства замечанием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Очевидно, что принадлежность свободных множителей A и B классу $\mathcal{N}$ из формулировки теоремы 5 и $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированность в них же единичной подгруппы имеют место одновременно. Если группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, то согласно предложению 3.1 группы A и B также обладают данным свойством. Последнее утверждение равносильно $\mathcal{C}$ -отделимости и влечет за собой $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолированность единичной подгруппы в указанных группах. Таким образом, включение $A, B \in \mathcal{N}$ оказывается выполненным при любых предположениях, содержащихся в утверждениях 1–3, и поскольку $\mathcal{N}$ -группы не имеют $\mathcal{C}$ -дефекта в силу предложения 3.9, следствие 3 вытекает из теоремы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4. Пусть символ Z обозначает один из свободных множителей A, B . Из предложения 3.10 следует, что класс $\mathcal{N}_0$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в силу предложения 3.2 группа Z обладает гомоморфизмом на $\mathcal{N}_0$ -группу, инъективным на подгруппе H . Более того, так как любая конечно порожденная абелева подгруппа X группы Z имеет, очевидно, конечный ранг Гирша — Зайцева, то согласно тому же предложению найдется гомоморфизм группы Z на $\mathcal{N}_0$ -группу, действующий инъективно на подгруппе X . Отсюда и из предложения 3.9 следует, что подгруппа X $\mathcal{C}$ -отделима в группе Z , если она $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ -изолирована в этой группе, и, стало быть, группа Z не имеет $\mathcal{C}$ -дефекта. Таким образом, доказываемое утверждение вытекает из теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
2. Sokolov E. V. A characterization of root classes of groups // Commun. Algebra. 2015. V. 43, N 2. P. 856–860.
3. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1957. V. 7, N 1. P. 29–62.
4. Азаров Д. Н., Тьеджо Д. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Т. 5. С. 6–10.
5. Соколов Е. В. Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 767–780.
6. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.
7. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслэга — Солитэра // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 700–709.
8. Соколов Е. В. Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.

9. Соколов Е. В. Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1382–1400.
10. Sokolov E. V. Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups // J. Algebra. 2021. V. 582. P. 1–25.
11. Sokolov E. V. Certain residual properties of HNN-extensions with central associated subgroups // Commun. Algebra. 2022. V. 50, N 3. P. 962–987.
12. Zhou W., Kim G. Abelian subgroup separability of certain HNN extensions // Int. J. Algebra Comput. 2018. V. 28, N 3. P. 543–552.
13. Zhou W., Kim G. Abelian subgroup separability of certain generalized free products of groups // Algebra Colloq. 2020. V. 27, N 4. P. 651–660.
14. Соколов Е. В. Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. I // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 1083–1093.
15. Соколов Е. В. Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. II // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 207–228.
16. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Am. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
17. Higman G. Amalgams of p -groups // J. Algebra. 1964. V. 1, N 3. P. 301–305.
18. Соколов Е. В. Об аппроксимируемости конечными p -группами свободных произведений групп с нормальным объединением // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 1. С. 125–131.
19. Wong K. B., Wong P. C. Polygonal products of residually finite groups // Bull. Korean Math. Soc. 2007. V. 44, N 1. P. 61–71.
20. Kim G., Lee Y., McCarron J. Residual p -finiteness of certain generalized free products of nilpotent groups // Kyungpook Math. J. 2008. V. 48, N 3. P. 495–502.
21. Туманова Е. А. Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 3. С. 134–141.
22. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости конечными π -группами обобщенных свободных произведений групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 605–614.
23. Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 485–497.
24. Азаров Д. Н. Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 249–264.
25. Розов А. В. Об аппроксимируемости конечными π -группами некоторых свободных произведений групп с центральными объединенными подгруппами // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2016. № 2. С. 37–44.
26. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 2020. № 3. С. 48–63.
27. Sokolov E. V. On the residual nilpotence of generalized free products of groups // J. Algebra. 2024. V. 657. P. 292–326.
28. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.
29. Молдаванский Д. И. О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 6. С. 1370–1384.
30. Sokolov E. V. On the separability of subgroups of nilpotent groups by root classes of groups // J. Group Theory. 2023. V. 26, N 4. P. 751–777.
31. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π -групп // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.
32. Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya. On various rank conditions in infinite groups // Algebra Discr. Math. 2007. N 4. P. 23–43.
33. Туманова Е. А. Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 891–906.
34. Азаров Д. Н., Иванова Е. А. К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 1999. Т. 2. С. 5–7.
35. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

-
- 36.** Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 26 ноября 2024 г.

После доработки 26 ноября 2024 г.

Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Баранов Даниил Романович (ORCID 0009-0000-4964-7874),
Соколов Евгений Викторович (ORCID 0000-0002-8256-8016)

Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025

d.r.baranov.404@gmail.com, ev-sokolov@yandex.ru