

УДК 512.5

*Д. И. Молдаванский*

## 40 ЛЕТ НАУЧНОЙ ЛОГИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ ИВГУ: ИТОГИ И ПЕРСПЕКТИВЫ

В основу статьи положен доклад о результатах научных исследований, проводившихся кафедрой алгебры и математической логики Ивановского государственного университета, прочитанный на пленарном заседании научной конференции ИвГУ 28 января 2014 г.

**Ключевые слова:** алгебра, алгоритм, комбинаторная теория групп, аппроксимационные свойства групп.

The article is based on the report about the research results held by the Department of algebra and mathematical logic of Ivanovo State University, made at a plenary meeting of scientific conference of IvSU on 28 January, 2014.

**Key words:** algebra, algorithm, combinatorial group theory, residual properties of groups.

Два предварительных замечания: 1) научные исследования в области алгебры и математической логики на нашем факультете начались еще в педагогическом институте, и рассказ об их современном состоянии естественно вести с истоков; 2) результаты научной работы в области теоретической математики выражаются в виде формулировок новых (т. е. ранее неизвестных) теорем. Формулировок я приводить не буду, но все-таки надеюсь дать некоторое представление о предмете наших исследований, стараясь по возможности избегать употребления совсем уж специальных терминов.

Современная алгебра и математическая логика являются сравнительно молодыми разделами математики. Несмотря на то что истоки алгебры восходят ко временам глубокой древности, где она создавалась как наука о решении уравнений, современный взгляд на предмет ее изучения сформировался лишь к концу XIX в., благодаря главным образом трудам французских математиков Ж. Л. Лагранжа и Э. Галуа. Предмет изучения современной алгебры — алгебраические системы, т. е. множества произвольной природы, рассматриваемые вместе с некоторым набором определенных на них операций. Хорошо знакомый всем пример алгебраической системы — множество целых чисел с операциями сложения и умножения.

Еще более молодым является раздел математической логики, называемый теорией алгоритмов. Интуитивным представлением о том, что такое алгоритм, владеет каждый, кто учился в школе. Алгоритмом мы считаем систему инструкций, предназначенную для решения бесконечной серии однотипных задач. Простейшие примеры известных всем алгоритмов — правила сложения и умножения натуральных чисел, заданных их десятичной записью.

---

© Молдаванский Д. И., 2014

Тем не менее для некоторых математических проблем, допускающих алгоритмическую формулировку, многолетние поиски соответствующих алгоритмов оказались безуспешными, и в начале XX в. в математическом сообществе начала формироваться гипотеза о том, что для решения ряда алгоритмических проблем алгоритмов не существует. Рассмотрение этой гипотезы потребовало строгого математического определения понятия алгоритма в отличие от приведенного выше содержательного описания этого понятия. Для решения того, является ли алгоритмом предлагаемая система инструкций, достаточно интуитивного представления об алгоритме, но для доказательства невозможности существования некоторого математического объекта необходимо располагать его точным определением. В первой половине прошлого столетия советским математиком А. А. Марковым, англичанином А. Тьюрингом и американцем А. Черчем были предложены определения алгоритма, формулировки которых основывались на разных подходах и выглядели по-разному. Однако вскоре было доказано, что эти определения равносильны, и это послужило существенным аргументом для принятия так называемого тезиса Черча об адекватности данных определений интуитивному представлению об алгоритме. Это позволило доказать алгоритмическую неразрешимость ряда математических проблем и положило начало математической теории алгоритмов, весьма содержательному и интенсивно развиваемому разделу математической логики.

Одной из основных алгебраических систем является система, называемая группой. Группа — это множество с одной двухместной операцией, обладающей некоторыми естественными свойствами. Простейший и наглядный пример — множество самосовмещений квадрата. Такими самосовмещениями являются повороты его вокруг центра (т. е. точки пересечения диагоналей) на угол, кратный 90 градусам, и зеркальные отражения относительно осей симметрии. На этом множестве можно определить операцию умножения, а именно: произведением двух самосовмещений называется результат их последовательного выполнения. Множество самосовмещений с этой операцией и есть группа.

Понятие группы, возникшее в работах Лагранжа и Галуа, привело к развитию весьма глубокой и содержательной теории. Сначала в теории групп рассматривались лишь конечные группы (т. е. состоящие из конечного числа элементов). Однако к началу XX в. стало понятно, что, с одной стороны, доказательство многих утверждений о группах не используют предположений об их конечности, а с другой — в различных областях математики наряду с конечными группами встречаются (возможно, даже чаще) и бесконечные группы. Интенсивное развитие теории бесконечных групп в нашей стране было инициировано О. Ю. Шмидтом. Имя этого замечательного ученого, несомненно, знакомо всем присутствующим, но, возможно, далеко не каждый знает, что он начинал свою научную карьеру как математик, работающий в области теории групп. Написанная им и изданная в 1916 г. книга «Абстрактная теория групп» была первой в мире публикацией, где теория групп излагалась без предположений об их конечности. В 1929 г. О. Ю. Шмидт возглавил созданную им в Московском университете кафедру высшей алгебры и организовал работу руководимого им алгебраического семинара, служившего своеобразной Меккой для алгебраистов страны и продолжающего

работать в настоящее время. У меня нет точных свидетельств, но я уверен, что участником этого семинара в студенческие и аспирантские годы был и А. И. Мальцев. Во всяком случае, тематика кандидатской диссертации, защищенной им в 1937 г., относилась к теории групп.

В 1931 г., после окончания математического факультета Московского университета, А. И. Мальцев переехал в Иваново и в течение почти тридцати лет (до отъезда в 1960 г. в Новосибирский академгородок) работал в Ивановском педагогическом институте сначала ассистентом, затем доцентом и профессором, заведя созданной им кафедрой высшей алгебры. Здесь он осуществлял интенсивную и плодотворную педагогическую деятельность, сочетая ее с большой и весьма успешной научно-исследовательской работой в области алгебры и математической логики, воспитал большую группу математиков, получившую неофициальное название Ивановской алгебраической школы.

После отъезда Анатолия Ивановича в Новосибирск на кафедре алгебры остались работать его ученики Д. М. Смирнов и Е. А. Халезов. Кафедру алгебры возглавил Д. А. Захаров, которого также можно считать учеником А. И. Мальцева, хотя кандидатскую диссертацию он написал не по алгебре и математической логике, а по топологии под руководством В. А. Ефремовича. В том же 1960 г. по приглашению А. И. Мальцева к работе на кафедре приступил М. Д. Гриндлингер, за два года до этого приехавший в СССР из США, где он был учеником и сотрудником В. Магнуса, немецкого и американского математика, одного из создателей значительного раздела современной теории групп, называемого теперь комбинаторной теорией групп.

В этот период научно-исследовательскую работу на кафедре проводили названные выше специалисты и их аспиранты: Е. А. Поляков, аспирант Д. А. Захарова, и А. И. Черемисин, аспирант Д. М. Смирнова. Аспирантом кафедры был и И. А. Лавров. Его научным руководителем являлся А. И. Мальцев, и потому Игорь Андреевич все время аспирантской подготовки провел в Новосибирске. На кафедру он вернулся в 1963 г. после защиты кандидатской диссертации и проработал здесь до 1966 г., т. е. до перехода в Новосибирский академгородок. Несколько ранее в Новосибирск переехали Д. М. Смирнов и Д. А. Захаров.

К этому времени на кафедре сложились следующие направления научно-исследовательской работы: алгебры рекурсивных функций (раздел математической логики и теории алгоритмов, изучение которого началась с основополагающей статьи А. И. Мальцева «Конструктивные алгебры», 1961 г.), теория колец и комбинаторная теория групп. После переезда в Новосибирск Д. М. Смирнова и Д. А. Захарова эти направления возглавлялись Е. А. Поляковым и А. И. Черемисиним, уже ставшими кандидатами наук, а также М. Д. Гриндлингером. На кафедре проходила подготовку большая группа аспирантов. В нее входили, в частности, А. И. Щеглов (руководитель Е. А. Поляков), автор этих строк и В. В. Солдатова (руководитель М. Д. Гриндлингер). Результаты исследований с подробными доказательствами докладывались на заседаниях кафедрального семинара, после чего направлялись в журналы разного уровня.

В то время в нашей стране развитию фундаментальных исследований в математике и расширению их географии придавалось большое значение. Стремление способствовать такому расширению научно-исследовательской

работы в области алгебры и математической логики привело А. Г. Куроша и А. И. Мальцева к идее систематического проведения всесоюзных алгебраических конференций. Первые две (тогда они назывались алгебраическими коллоквиумами) состоялись в Москве в феврале 1958 г. и в апреле 1959 г., их участниками были А. И. Мальцев и Д. М. Смирнов. Последующие конференции проходили в различных городах Советского Союза (Киев, Кишинев, Минск, Новосибирск, Свердловск, Рига и др.), и практически в каждой из них принимали участие ивановские математики, причем зачастую ивановская делегация была одной из наиболее многочисленных. Наряду с преподавателями факультета в нее входили аспиранты, также выступавшие с сообщениями о своих научных результатах, а иногда и студенты.

Научно-исследовательская работа студентов всегда была в центре внимания нашей кафедры. Мы считаем, что опыт совместной с научным руководителем работы, направленной на изучение некоторого современного раздела математики (излагаемого в статьях, а не в учебниках) и получение, пусть небольшого, нового результата, должен входить в подготовку каждого специалиста-математика. Только на этом пути можно решать задачу подготовки молодых научных кадров, преемственности научных исследований. Еще в педагогическом институте части студентов, преуспевших в такой работе, государственный экзамен по математике заменялся защитой диплома (напомню, что учебные планы пединститутов не предусматривали такой формы завершения подготовки). Переход института в статус университета привел, разумеется, к большим возможностям организации научно-исследовательской работы студентов. Читавшиеся ранее на общественных началах и посещаемые лишь заинтересованными студентами специальные курсы по современному состоянию научных направлений, разрабатываемых на кафедре, вошли в учебные планы и стали обязательными для студентов, проходящих специализацию на кафедре. Обязательной стала и защита выпускной дипломной работы, и это в большей степени способствовало отбору для поступления в аспирантуру студентов, проявивших способности и желание заниматься научной деятельностью в области теоретической математики. Новые возможности в подготовке молодых научных кадров появились в 1993 г. с началом работы на факультете магистратуры. Все студенты, поступавшие в аспирантуру кафедры в течение последних 20 лет, прошли магистерскую подготовку.

Все выпускники аспирантуры нашей кафедры защитили кандидатские диссертации. Перечислю некоторых из них, начиная с пединститутских выпусков. А. П. Горюшкин, первый мой аспирант, вот уже около 40 лет работает в Петропавловске-Камчатском, занимая разные должности — от доцента и профессора до заведующего кафедрой и проректора по научной работе. Б. Я. Солон, аспирант Е. А. Полякова, доктор физико-математических наук, специалист по математической логике и теории алгоритмов, недавно вернулся в наш вуз, став деканом факультета и заведующим кафедрой алгебры и математической логики. Его однокурсник, Л. М. Шнеерсон, мой аспирант, — профессор Нью-Йоркского университета. С. Д. Бродский, мой аспирант, работает в США. Его однокурсник, тоже мой аспирант, В. Н. Егоров — ректор нашего университета. Е. Д. Логинова (аспирант В. Н. Егорова) — доцент нашей кафедры. Мои аспиранты: Д. Тьеджо, гражданин Камеруна; Д. Н. Азаров — доцент нашей кафедры, в настоящее время старший научный сотруд-

ник; Е. В. Соколов — заведующий кафедрой вычислительной и прикладной математики; Е. А. Иванова, более 15 лет проработавшая в должности ассистента, старшего преподавателя, доцента нашей кафедры. А. В. Розов, аспирант Д. Н. Азарова, — старший преподаватель кафедры вычислительной и прикладной математики.

Начиная с 80-х гг. прошлого столетия основным направлением научно-исследовательской работы кафедры постепенно становится раздел современной комбинаторной теории групп, в котором изучаются свойства финитной аппроксимируемости групп и ее обобщений применительно к свободным конструкциям групп.

Как утверждают американские математики Б. Чандлер и В. Магнус в книге «Развитие комбинаторной теории групп» (1982 г., русский перевод — 1985 г.), понятие финитно аппроксимируемой группы впервые в явном виде возникло в статье А. И. Мальцева 1940 г. (приведенное выше название для этого понятия появилось позднее). Здесь были доказаны две важные теоремы о финитно аппроксимируемых группах. В последующих статьях 1949 и 1958 гг. А. И. Мальцев возвращается к этому понятию, доказывая ряд теорем о финитно аппроксимируемых группах и о некоторых обобщениях данного свойства групп и устанавливая связь между этими свойствами и алгоритмической разрешимостью соответствующих теоретико-групповых проблем. (Отмечу, что статья 1958 г. была напечатана в выпуске «Ученых записок» Ивановского педагогического института.) Тогда же ряд весьма интересных и важных результатов в этом направлении получил и Д. М. Смирнов. Результаты А. И. Мальцева и Д. М. Смирнова являются основополагающими в данном разделе теории групп и цитируются практически в каждой работе по этой проблематике наших и зарубежных авторов.

Важную роль в теории групп играют групповые конструкции, т. е. способы построения из нескольких заданных групп новой группы. Возникает следующий естественный вопрос: будет ли группа, построенная из групп с некоторым свойством, тоже иметь это свойство? Ответ зависит от свойства и от рассматриваемой конструкции, и упомянутое выше направление наших исследований состоит в изучении этого вопроса для свойств финитной аппроксимируемости и ее обобщений и так называемых свободных конструкций групп.

Вот уже более полувека эта проблематика с разной степенью интенсивности изучается в нашей стране и за рубежом. Заметными центрами таких исследований являются некоторые университеты Англии, Австралии, США и Канады. В нашей стране такие исследования проводились и проводятся главным образом в Ивановском университете и в Новосибирском академгородке.

Можно с полным основанием утверждать, что научный уровень и значимость результатов, полученных членами нашего коллектива, не уступают мировому. Они публикуются в ряде ведущих математических журналов, изданиях Ивановского университета, в частности в «Вестнике ИвГУ». По результатам исследований защищены 8 кандидатских диссертаций и одна докторская. Приятно отметить, что во время защит членами совета неоднократно отмечалась традиционность их проблематики для Ивановского университета. Несмотря на некоторые перемены в кадровом составе кафедры, исследовательская работа в указанном направлении продолжается и будет продолжаться, причем теперь в ней участвуют и члены других кафедр.

После некоторого перерыва, возникшего ввиду отсутствия подходящих кандидатур, на кафедре возобновилась подготовка аспирантов. К работе по научному руководству аспирантами приступил и весьма преуспел в этом Д. Н. Азаров. Его аспирант А. В. Розов в декабре 2013 г. блестяще защитил кандидатскую диссертацию. Причем эта защита состоялась всего через два месяца после окончания аспирантуры — событие для нашей кафедры беспрецедентное.

Д. Н. Азаров, несомненно, является ведущим научным работником нашей кафедры. В настоящее время, будучи в должности старшего научного сотрудника, он опубликовал ряд статей в важнейших научных журналах и занимается подготовкой докторской диссертации. При этом успевает руководить научно-исследовательской работой студентов и аспирантов.

Таким образом, имеются достаточные основания утверждать, что научно-исследовательская деятельность в области комбинаторной теории групп на нашем факультете будет успешно продолжаться.

В 70-х гг. прошлого века, желая отразить все направления выполняемой научно-исследовательской работы, мы переименовали кафедру высшей алгебры, назвав ее кафедрой алгебры и математической логики. Со временем по разным причинам вторая часть названия стала отражать лишь существование прикрепленной к кафедре соответствующей учебной дисциплины. Теперь, с приходом на кафедру Б. Я. Солона, у нас, несомненно, возобновится научно-исследовательская работа по математической логике и теории алгоритмов.