Математические заметки

Том 105 выпуск 1 январь 2019

УДК 512.543

Об одном семействе финитно аппроксимируемых групп

Д. И. Молдаванский

Известно, что существует конечно порожденная финитно аппроксимируемая (короче, $\mathcal{F}$-аппроксимируемая) группа, расширение при помощи которой некоторой конечной группы не является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Здесь будет показано, что, тем не менее, любое расширение конечной группы при помощи конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы является хопфовой группой, и что расширение конечной группы без центра при помощи конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Если конечно порожденная $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа G такова, что $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой является любое расширение при помощи G произвольной конечной группы, то тем же свойством обладает и нисходящее HNN-расширение группы G, если оно является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: финитно аппроксимируемые группы, HNN-расширения групп.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11726

1. Введение. Формулировка результатов. Хорошо известно (и практически очевидно), что любое расширение финитно аппроксимируемой (короче, $\mathcal{F}$-аппроксимируемой) группы при помощи конечной группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. В связи с этим естественно возникает вопрос о справедливости "двойственного" утверждения: верно ли, что расширение конечной группы при помощи $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы всегда является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой? Следующий простой пример показывает, что ответ на этот вопрос отрицателен.

Пусть p – простое число, пусть для любого натурального числа n символ A_n обозначает конечную циклическую группу порядка p^{n+1} с порождающим a_n и пусть

$$G = \langle a_1, a_2, \dots;\ a_n^{p^{n+1}} = 1,\ a_1^p = a_n^{p^n},\ n = 1, 2, \dots \rangle$$

– свободное произведение семейства групп $A_1, A_2, \dots$ с одной объединенной подгруппой A_1^p. Группа G не является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой, поскольку содержит неединичные полные элементы (например, a_1^p). С другой стороны, объединяемая подгруппа A_1^p является конечной нормальной (даже центральной) подгруппой группы G, а фактор-группа G/A_1^P является (обычным) свободным произведением семейства конечных групп $A_n/A_n^{p^n}$ и потому – $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Определенным недостатком этого примера можно считать то, что группа G не является конечно порожденной. Существование примера конечно порожденной группы с аналогичными свойствами доказано в работе [1].

К построению такого примера авторы статьи [1] пришли, рассматривая другой вопрос, возникший в связи с известной теоремой Мальцева, согласно которой расщепляемое расширение конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы при помощи любой $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой (см. [2; теорема 1]). Отсюда следует, в частности, что любое расширение каждой конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы при помощи бесконечной циклической группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой, и в [1] формулируется задача описания всех конечно порожденных групп, которые ведут себя в этом смысле так же, как бесконечная циклическая группа. Для ее решения авторы этой статьи вводят понятие, название которого можно перевести как "сверх финитно аппроксимируемая группа"; будем использовать для него сокращение $\mathcal{SF}$-аппроксимируемая группа.

Конечно порожденная группа G называется *$\mathcal{SF}$-аппроксимируемой группой*, если каждое расширение произвольной конечной группы при помощи группы G является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Поскольку фактор-группа $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы по конечной нормальной подгруппе $\mathcal{F}$-аппроксимируема, любая $\mathcal{SF}$-аппроксимируемая группа должна быть $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Очевидными примерами $\mathcal{SF}$-аппроксимируемых групп являются конечные группы и конечно порожденные свободные группы, а из результатов работы [1] следует, что и все полициклические группы принадлежат этому семейству. Основной результат этой работы формулируется следующим образом.

Предложение 1 [1; теорема 3.1]. *Каждое расширение любой конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{SF}$-аппроксимируемой группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.*

(Разумеется, обратное также справедливо, так что семейство $\mathcal{SF}$-аппроксимируемых групп и является исчерпывающим ответом на вышеупомянутый вопрос, рассматриваемый в [1].)

Отсюда и из доказанного в работе [3] утверждения о том, что существует расширение группы $\mathbb{Z}^3$ при помощи группы $SL_3(\mathbb{Z})$, которое $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой не является, авторы статьи заключают, что группа $SL_3(\mathbb{Z})$ не является $\mathcal{SF}$-аппроксимируемой и, следовательно, представляет собой пример конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы, расширение при помощи которой некоторой конечной группы не является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

Оказывается, тем не менее, что любое расширение конечной группы при помощи конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы обладает более слабым свойством, а именно, является хопфовой группой.

Напомним, что группа G называется *хопфовой*, если она не изоморфна никакой своей истинной фактор-группе, т. е. если для любой нормальной подгруппы N группы G из того, что $G/N \simeq G$, следует, что $N = 1$. В противном случае группа G называется *нехопфовой*. Это понятие появилось после того, как Г. Хопфом в 1932 году был сформулирован вопрос о существовании конечно порожденных нехопфовых групп (см. [4; с. 47]). Первым общим результатом по этому вопросу явилась теорема Мальцева [5], утверждавшая хопфовость произвольной конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы.

Хопфовость произвольного расширения конечной группы при помощи конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы вытекает из следующего более общего результата.

Теорема 1. *Произвольное расширение группы с условием максимальности для подгрупп при помощи конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы является хопфовой группой.*

Возвращаясь к группе $SL_3(\mathbb{Z})$, отметим, что пример конкретной конечной группы, расширение которой при помощи группы $SL_3(\mathbb{Z})$ не является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой, в работе [1] не указан (и, возможно, не может быть получен из приведенного доказательства). Других примеров конечно порожденных групп, не являющихся $\mathcal{SF}$-аппроксимируемыми группами, пока, к сожалению, нет. Тем не менее, некоторую информацию о строении группы, не являющейся $\mathcal{F}$-аппроксимируемой и обладающей конечной нормальной подгруппой, фактор-группа по которой $\mathcal{F}$-аппроксимируема, можно получить.

Пусть через $\sigma(G)$ обозначается пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Очевидно, что совпадение подгруппы $\sigma(G)$ с единичной подгруппой равносильно $\mathcal{F}$-аппроксимируемости группы G; более того, легко видеть, что $\sigma(G)$ является наименьшей из всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым $\mathcal{F}$-аппроксимируемы.

Практически очевидно, что некоторая группа G не является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой и обладает конечной нормальной подгруппой, фактор-группа по которой $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее подгруппа $\sigma(G)$ неединична и конечна. Кроме того, справедлива

Теорема 2. *Если группа G не является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой и N – конечная нормальная подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/N $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то подгруппа $\sigma(G)$ отлична от единичной и содержится в центре подгруппы N. В частности, центр подгруппы N неединичен, а подгруппа $\sigma(G)$ является конечной абелевой.*

В связи с вопросом, сформулированным в начале статьи, определенный интерес представляет очевидное

Следствие 1. *Произвольное расширение конечной группы без центра при помощи $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.*

Для дальнейшего приведем еще два результата из статьи [1].

Предложение 2. *Следующие утверждения справедливы:*

(1) *семейство $\mathcal{SF}$-аппроксимируемых групп замкнуто относительно расширений и обычных свободных произведений;*

(2) HNN-*расширение, базовая группа которого является $\mathcal{SF}$-аппроксимируемой группой, а связанные подгруппы конечны, является $\mathcal{SF}$-аппроксимируемой группой.*

Основным результатом данной статьи является

Теорема 3. *Пусть G – некоторая группа, φ – инъективный эндоморфизм группы G и $G(\varphi) = (G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi,\ g \in G)$ – соответствующее нисходящее* HNN-*расширение. Если G является $\mathcal{SF}$-аппроксимируемой группой и группа $G(\varphi)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то и $G(\varphi)$ является $\mathcal{SF}$-аппроксимируемой группой.*

Отсюда и из утверждений пункта (1) предложения 2 вытекает

Следствие 2. *Каждая $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа Баумслага–Солитэра является $\mathcal{SF}$-аппроксимируемой группой.*

Напомним, что семейство групп Баумслага–Солитэра состоит из групп, задаваемых представлением с двумя порождающими и одним определяющим соотношением вида

$$G(m,n) = \langle a, b;\ a^{-1}b^m a = b^n \rangle,$$

где m и n – ненулевые целые числа, причем без потери общности можно считать, что $|n| \geqslant m > 0$. Известно (см. [6]), что группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$, или $|n| = m$.

Справедливость утверждения следствия 2 для групп вида $G(1,n)$ вытекает из теоремы 3, так как каждая такая группа является нисходящим HNN-расширением бесконечной циклической группы. Подгруппа H группы $G(m,\pm m)$, порожденная элементом b^m, нормальна, а фактор-группа $G(m,\pm m)/H$ является свободным произведением бесконечной циклической группы и циклической группы порядка m, т.е. свободным произведением двух $\mathcal{SF}$-аппроксимируемых групп. Следовательно, каждая группа $G(m,\pm m)$ есть расширение $\mathcal{S}F$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathcal{SF}$-аппроксимируемой и потому $\mathcal{SF}$-аппроксимируема.

2. Некоторые замечания о конструкции HNN-расширения групп. Для большей замкнутости изложения напомним определение и основные свойства конструкции HNN-расширения групп.

Пусть G – некоторая группа с изоморфными подгруппами A и B и $\varphi\colon A \to B$ – фиксированный изоморфизм группы A на группу B. Предположим также, что группа G в системе порождающих X задается множеством определяющих слов W.

HNN-*расширением группы G с проходной буквой t и связанными в соответствии с изоморфизмом φ подгруппами A и B* называется группа

$$G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi),$$

порождаемая множеством X и еще одним элементом t и определяемая в этой системе порождающих всеми определяющими словами множества W и всевозможными соотношениями вида $t^{-1}at = a\varphi$ (где $a \in A$).

Иначе говоря, группа G^* является фактор-группой свободного произведения $F = G * \langle t \rangle$ группы G и бесконечной циклической группы с порождающим t по нормальному замыканию в F множества элементов $\{t^{-1}at(a\varphi)^{-1} \mid a \in A\}$.

Изучение строения групп, получаемых с помощью конструкции HNN-расширения, базируется на следующих двух основных свойствах этой конструкции (см. пункт (1) теоремы IV.2.1 монографии [7]).

Первое из них состоит в том, что группа G естественным образом вложима в группу G^*, т.е. подгруппа группы G^*, порождаемая множеством X, изоморфна группе G и потому может быть отождествлена с ней.

Очевидно, что группа G^* порождается подгруппой G и элементом t, и потому произвольный элемент f группы G^* может быть записан в виде

$$f = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n,$$

где $n \geqslant 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $g_0, g_1, \ldots, g_n$ – элементы группы G.

Если из всех записей такого вида элемента f выбрана та, в которой число n вхождений элемента t является наименьшим, то она обладает следующим свойством. При $n \geqslant 2$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ из того, что $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} = 0$, следует, что элемент g_i не принадлежит подгруппе A, если $\varepsilon_i = -1$, и элемент g_i не принадлежит подгруппе B, если $\varepsilon_i = 1$. Запись элемента f с этим свойством называется *приведенной*.

Таким образом, каждый элемент группы G^* обладает хотя бы одной приведенной записью, и второе из основных свойств этой группы (называемое леммой Бриттона) состоит в том, что элемент этой группы, имеющий приведенную запись с ненулевым числом вхождений проходной буквы t, отличен от единицы.

HNN-расширение $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B, \varphi)$ называется *нисходящим*, если хотя бы одна из связанных подгрупп A или B совпадает с группой G. Если считать (как легко видеть, без потери общности), что $A = G$, то отображение φ оказывается инъективным эндоморфизмом группы G. Поскольку в этом случае группа G^* однозначно определяется группой G и этим эндоморфизмом, для ее обозначения используется выражение

$$G(\varphi) = (G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi,\ g \in G).$$

Формулировка следующего утверждения фактически совпадает с формулировкой леммы 4.2 из работы [1], доказанной там при дополнительном предположении о конечности подгрупп A и B и ядра гомоморфизма π. Оказывается, тем не менее, что оно справедливо в самом общем случае.

Предложение 3. *Пусть группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}At = B,\ \varphi)$ является* HNN-*расширением группы G с проходной буквой t и связанными в соответствии с изоморфизмом φ подгруппами A и B и пусть для некоторой группы H существует эпиморфизм π группы H на группу G^*. Тогда группа H является* HNN-*расширением вида $(G_1, s;\ s^{-1}A_1 s = B_1,\ \psi)$, где G_1, A_1 и B_1 – π-прообразы подгрупп G, A и B соответственно, s – π-прообраз элемента t и отображение ψ определяется по правилу $x\psi = s^{-1}xs$ для любого $x \in A_1$. Кроме того, выполнено равенство $\psi\pi = \pi\varphi$.*

Доказательство. Договоримся через N обозначать ядро гомоморфизма π, предполагая также действующими все обозначения, введенные в формулировке предложения. Покажем, что определенное в этой формулировке отображение $\psi\colon A_1 \to H$ (очевидно, гомоморфное и инъективное) действительно является изоморфизмом подгруппы A_1 на подгруппу B_1.

В самом деле, так как для произвольного $x \in A_1$ имеем

$$(x\psi)\pi = (s^{-1}xs)\pi = t^{-1}(x\pi)t \in t^{-1}At = B,$$

включение $A_1\psi \subseteq B_1$ выполнено. Наоборот, для произвольного элемента $y \in B_1$ имеем $y\pi \in B$ и потому $y\pi = t^{-1}at$ для некоторого $a \in A$. Ввиду сюръективности π существует элемент $x \in H$ такой, что $x\pi = a$. Тогда $x \in A_1$ и $y\pi = t^{-1}at = (s^{-1}xs)\pi$. Следовательно,

$$y = (s^{-1}xs)z \qquad \text{для некоторого} \quad z \in N,$$

так что $y = s^{-1}(xz')s$, где $z' = szs^{-1}$. Поскольку $z' \in N$ и $N \subseteq A_1$ имеем $xz' \in A_1$, откуда $y = (xz')\psi \in A_1\psi$. Тем самым доказано включение $B_1 \subseteq A_1\psi$, а значит и равенство $A_1\psi = B_1$, что и требовалось.

Заметим теперь, что группа H порождается подгруппой G_1 и элементом s.

Действительно, образ $h\pi$ произвольного элемента $h \in H$ может быть записан в виде

$$h\pi = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n,$$

где $g_0, g_1, \dots, g_n$ – элементы группы G. Ввиду сюръективности отображения π для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ существует элемент $h_i \in H$ такой, что $g_i = h_i\pi$. Полагая

$$h' = h_0 s^{\varepsilon_1} h_1 s^{\varepsilon_2} h_2 \cdots h_{n-1} h^{\varepsilon_n} h_n,$$

имеем, очевидно, $h\pi = (h')\pi$. Поэтому $h = h'x$ для некоторого $x \in N$. Так как элементы $h_0, h_1, \dots, h_n$ лежат в подгруппе G_1 и $N \subseteq G_1$, элемент h лежит в подгруппе группы H, порождаемой множеством $G_1 \cup \{s\}$.

Пусть $F = G_1 * S$ – свободное произведение группы G_1 и бесконечной циклической группы S с порождающим s. Обозначим через θ гомоморфизм группы F в группу H, определяемый тождественными вложениями в H групп G_1 и S. Ввиду предыдущего замечания этот гомоморфизм сюръективен. Поскольку в группе H для любого элемента $x \in A_1$ выполнено равенство $s^{-1}xs = x\psi$, нормальное замыкание R в группе F множества элементов $\{s^{-1}xs(x\psi)^{-1} \mid x \in A_1\}$ лежит в ядре $\operatorname{Ker}\theta$ гомоморфизма θ. Таким образом, для доказательства того, что θ индуцирует изоморфизм фактор-группы F/R (т.е. HNN-расширения $(G_1, s;\, s^{-1}A_1s = B_1,\, \psi)$) на группу H, остается доказать противоположное включение.

Пусть f – произвольный элемент группы F, принадлежащий подгруппе $\operatorname{Ker}\theta$. Очевидно, что f (как и любой элемент из F), может быть записан в виде

$$f = g_0 s^{\varepsilon_1} g_1 s^{\varepsilon_2} g_2 \cdots g_{n-1} s^{\varepsilon_n} g_n,$$

где $n \geqslant 0$, элементы $g_0, g_1, \dots, g_n$ принадлежат подгруппе G_1 и для любого $i = 1, 2, \dots n$ выполнено $\varepsilon_i = \pm 1$.

Если $n = 0$, т.е. $f \in G_1$, то, поскольку действие θ на подгруппе G_1 инъективно, $f = 1$ и потому $f \in R$.

При $n > 0$ запись

$$(g_0\pi) t^{\varepsilon_1} (g_1\pi) t^{\varepsilon_2} (g_2\pi) \cdots (g_{n-1}\pi) t^{\varepsilon_n} (g_n\pi)$$

элемента $f(\theta\pi)$, равного единице в группе G^*, не может быть приведенной в силу леммы Бриттона. Поэтому $n > 1$ и существует такой номер i, $1 \leqslant i < n$, что

$$\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} = 0$$

и выполнен один из следующих случаев

- $\varepsilon_i = -1$ и элемент $g_i\pi$ лежит в подгруппе A;
- $\varepsilon_i = 1$ и элемент $g_i\pi$ лежит в подгруппе B_1.

В первом случае запись элемента f содержит подслово вида $s^{-1}g_is$, где $g_i \in A_1$, и так как тогда $s^{-1}g_is \equiv g_i\psi \pmod R$, элемент f сравним по модулю подгруппы R с элементом f', обладающим записью с меньшим числом вхождений элемента s. Легко видеть, что аналогичное утверждение справедливо и во втором случае. При этом, поскольку подгруппа R лежит в ядре θ, элемент f' также принадлежит этому ядру, и принадлежность элемента f подгруппе R вытекает из очевидных индуктивных соображений. Таким образом, включение $\operatorname{Ker}\theta \subseteq R$ действительно имеет место.

Наконец, поскольку для любого $x \in A_1$

$$x(\psi\pi) = (x\psi)\pi = (s^{-1}xs)\pi = t^{-1}(x\pi)t = (x\pi)\varphi = x(\pi\varphi),$$

равенство $\psi\pi = \pi\varphi$ справедливо, и все утверждения предложения 3 доказаны.

Перейдем к рассмотрению условий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений групп.

Пусть G – некоторая группа и φ – ее эндоморфизм. Напомним, что подгруппа H группы G называется *φ-допустимой*, если $H\varphi \subseteq H$. Если нормальная подгруппа H группы G φ-допустима, то эндоморфизм φ индуцирует эндоморфизм $\overline{\varphi}$ фактор-группы G/H, действующий по правилу: для любого элемента gH этой фактор-группы

$$(gH)\overline{\varphi} = (g\varphi)H.$$

Подгруппу H группы G назовем *φ-совместимой*, если выполнено равенство

$$H\varphi = G\varphi \cap H.$$

Для любого элемента $a \in G$ *φ-орбитой* этого элемента называется множество

$$\operatorname{Orb}_\varphi(a) = \{a\varphi^k \mid k = 0, 1, \dots\}.$$

Полученное в [8] необходимое и достаточное условие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости нисходящего HNN-расширения формулируется следующим образом.

Предложение 4. *Пусть G – некоторая группа и φ – инъективный эндоморфизм этой группы. Группа $G(\varphi)$ является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда пересечение всех φ-совместимых нормальных подгрупп конечного индекса группы G совпадает с единичной подгруппой.*

При доказательстве теоремы 3 будет использован критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости групп вида $G(\varphi)$, формулируемый в других терминах. Его вывод начнем с перечисления некоторых свойств φ-совместимых подгрупп, равносильных определению при дополнительных предположениях нормальности и конечности индекса.

Предложение 5. *Пусть снова G – некоторая группа с инъективным эндоморфизмом φ. Для произвольной нормальной подгруппы H конечного индекса группы G следующие утверждения попарно равносильны*:

(1) *подгруппа H φ-совместима*;

(2) *подгруппа H φ-допустима и индуцированный эндоморфизм $\overline{\varphi}$ фактор-группы G/H является ее автоморфизмом*;
(3) *подгруппа H φ-допустима и для любого элемента $a \in G$ из $a\varphi \in H$, следует $a \in H$.*

В самом деле, очевидно, что φ-совместимая подгруппа H является φ-допустимой. Если элемент aH фактор-группы G/H лежит в ядре эндоморфизма $\overline{\varphi}$, то имеем $H = (aH)\overline{\varphi} = (a\varphi)H$, и потому $a\varphi \in H$. Следовательно, $a\varphi \in G\varphi \cap H = H\varphi$, и в силу инъективности эндоморфизма φ имеем $a \in H$. Таким образом, эндоморфизм $\overline{\varphi}$ фактор-группы G/H инъективен, и так как эта группа конечна, он является и сюръективным, так что импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказана.

Если выполнено утверждение (2) и для элемента $a \in G$ имеет место включение $a\varphi \in H$, то поскольку тогда $(aH)\overline{\varphi} = (a\varphi)H = H$, имеем $aH = H$ и потому $a \in H$. Таким образом, доказана импликация (2) $\Rightarrow$ (3).

Наконец, докажем импликацию (3) $\Rightarrow$ (1). Так как подгруппа H φ-допустима, включение $H\varphi \subseteq G\varphi \cap H$ очевидно. Если $a \in G\varphi \cap H$, то $a = x\varphi$ для некоторого $x \in G$. Поскольку тогда $x\varphi \in H$, в силу (3) имеем $x \in H$, и потому $a = x\varphi \in H\varphi$. Следовательно, $G\varphi \cap H \subseteq H\varphi$, и равенство $H\varphi = G\varphi \cap H$ доказано.

Предложение 6. *Пусть G – конечно порожденная $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа и φ – инъективный эндоморфизм группы G. Нисходящее* HNN-*расширение $G(\varphi)$ является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда для любого неединичного элемента $a \in G$ найдется φ-допустимая нормальная подгруппа конечного индекса группы G, пересечение которой с φ-орбитой элемента a пусто.*

Доказательство. Предположим сначала, что группа $G(\varphi)$ является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой и что, тем не менее, φ-орбита некоторого неединичного элемента $a \in G$ имеет непустое пересечение с каждой φ-допустимой нормальной подгруппой конечного индекса группы G.

Пусть H – произвольная φ-совместимая нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Так как H является φ-допустимой, существует целое число $n \geqslant 0$ такое, что для любого $k \geqslant n$ элемент $a\varphi^k$ входит в подгруппу H.

В силу предложения 5 индуцированный эндоморфизм $\overline{\varphi}$ фактор-группы G/H является автоморфизмом. Обозначим через r порядок этого автоморфизма и выберем целое k так, чтобы $rk \geqslant n$. Тогда $a\varphi^{rk} \in H$ и так как

$$(aH)\overline{\varphi}^{rk} = aH, \qquad (aH)\overline{\varphi}^{rk} = (a\varphi^{rk})H,$$

имеем $aH = (a\varphi^{rk})H = H$, откуда $a \in H$.

Таким образом, неединичный элемент a принадлежит каждой φ-совместимой нормальной подгруппе конечного индекса группы G, что в силу предложения 4 противоречит $\mathcal{F}$-аппроксимируемо группы $G(\varphi)$.

Обратно, предположим, что для любого неединичного элемента $a \in G$ найдется φ-допустимая нормальная подгруппа конечного индекса группы G, пересечение которой с φ-орбитой элемента a пусто. Ввиду предложения 4 достаточно показать, что произвольный неединичный элемент не входит в некоторую φ-совместимую нормальную подгруппу конечного индекса группы G.

Пусть элемент $a \in G$ отличен от 1 и пусть H – φ-допустимая нормальная подгруппа конечного индекса группы G, не содержащая ни одного элемента вида $a\varphi^k$. Пусть

$$N = \{x \in G \mid x\varphi^k \in H \text{ для некоторого целого } k \geqslant 0\}.$$

Очевидно, что N является φ-допустимой нормальной подгруппой конечного индекса группы G. Легко видеть также, что для любого элемента $x \in G$ из того, что $x\varphi \in N$, следует, что $x \in N$, и потому в силу предложения 5 подгруппа N φ-совместима. Так как $a \notin N$, требуемое утверждение доказано.

3. Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 1. Пусть группа G обладает нормальной подгруппой N, фактор-группа G/N по которой является конечно порожденной $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Если, к тому же, группа N удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, группа G также является конечно порожденной.

Предположим, рассуждая от противного, что группа G нехопфова. Тогда, как легко видеть, существует сюръективный эндоморфизм φ этой группы с нетривиальным ядром. Для каждого целого числа $n \geqslant 0$ через K_n обозначим ядро эндоморфизма φ^n. Очевидно, что для любого n выполнено включение $K_n \subseteq K_{n+1}$, и нетрудно понять, что все эти включения являются строгими.

Действительно, если предположить, что для некоторого n имеет место равенство $K_n = K_{n+1}$, причем n выбрано наименьшим с этим свойством, то ввиду того, что $K_1 \neq 1$, число n положительно, и потому существует элемент $a \in K_n$, не принадлежащий подгруппе K_{n-1}. Ввиду сюръективности отображения φ для некоторого $b \in G$ имеем $a = b\varphi$. Тогда $b\varphi^{n+1} = a\varphi^n = 1$, так что $b \in K_{n+1} = K_n$. Следовательно, $a\varphi^{n-1} = b\varphi^n = 1$, что противоречит выбору элемента a.

Как известно, для любого целого числа $j \geqslant 1$ существует биективное отображение семейства всех нормальных подгрупп индекса j группы G/K_n на семейство всех тех нормальных подгрупп индекса j группы G, в которых содержится подгруппа K_n. Так как группы G/K_n и G изоморфны и в силу теоремы М. Холла семейство всех подгрупп индекса j (напомним, конечно порожденной) группы G конечно, подгруппа K_n содержится в каждой подгруппе индекса j группы G.

Таким образом, для любого $n \geqslant 0$ имеет место включение $K_n \subseteq \sigma(G)$. А так как фактор-группа G/N $\mathcal{F}$-аппроксимируема, справедливо также включение $\sigma(G) \subseteq N$. Таким образом, группа N содержит бесконечную строго возрастающую последовательность подгрупп, что невозможно в силу выполнимости в N условия максимальности. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Если группа G не является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой и содержит конечную нормальную подгруппу N, фактор-группа G/N по которой $\mathcal{F}$-аппроксимируема, то ее подгруппа $\sigma(G)$ неединична и содержится в подгруппе N.

Централизатор $C_G(N)$ подгруппы N в группе G совпадает с ядром гомоморфизма группы G в группу автоморфизмов группы N, при котором образом элемента $a \in G$ является ограничение на подгруппу N внутреннего автоморфизма группы G, производимого элементом a. Следовательно, $C_G(N)$ – нормальная подгруппа конечного индекса группы G, и потому $\sigma(G) \subseteq C_G(N)$. Так как пересечение подгруппы N с ее централизатором совпадает с центром $Z(N)$ группы N, выполнено включение $\sigma(G) \subseteq Z(N)$, и все утверждения теоремы 2 доказаны.

Доказательство теоремы 3. Пусть G – $\mathcal{SF}$-аппроксимируемая группа, φ – инъективный эндоморфизм группы G и пусть нисходящее HNN-расширение $G(\varphi) = (G, t;\ t^{-1}gt = g\varphi,\ g \in G)$ является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Требуется показать, что тогда расширение H некоторой конечной группы N при помощи группы $G(\varphi)$ также является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой.

В силу построения группы H существует сюръективный гомоморфизм π этой группы на группу $G(\varphi)$, ядро которого совпадает с N. Из предложения 3 следует, что группа H является нисходящим HNN-расширением

$$G_1(\psi) = (G, s;\ s^{-1}gs = g\psi,\ g \in G_1),$$

где G_1 – π-прообраз подгруппы G, s – π-прообраз элемента t, и эндоморфизмом ψ действует по правилу $x\psi = s^{-1}xs$ для любого $x \in G_1$.

Заметим, далее, что из равенства $\psi\pi = \pi\varphi$ следует, очевидно, что для любого элемента $a \in G_1$ и произвольного целого числа $k \geqslant 0$ имеем $(a\psi^k)\pi = (a\pi)\varphi^k$. Отсюда

$$\mathrm{Orb}_\psi(a)\pi = \mathrm{Orb}_\varphi(a\pi) \qquad \text{для каждого} \quad a \in G_1.$$

Заметим также, что π-прообраз X произвольной φ-допустимой нормальной подгруппы Y конечного индекса группы G является ψ-допустимой нормальной подгруппой группы G_1. Действительно, нормальность и конечность индекса в группе G_1 подгруппы X обеспечиваются сюръективностью гомоморфизма π. К тому же, для любого $x \in X$ имеем $(x\psi)\pi = (x\pi)\varphi \in Y$, так что $x\psi \in X$.

Покажем теперь, что для произвольного неединичного элемента $x \in G_1$ в группе G_1 существует такая ψ-допустимая нормальная подгруппа X конечного индекса, что $\mathrm{Orb}_\psi(x) \cap X = \varnothing$. В силу предложения 6 тем самым будет доказана $\mathcal{F}$-аппроксимируемость группы H и, следовательно, завершено доказательство теоремы.

Если x не принадлежит подгруппе N, то $x\pi$ является неединичным элементом группы G. Поскольку по условию теоремы группа $G(\varphi)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема, из предложения 6 следует существование нормальной φ-допустимой подгруппы Y конечного индекса группы G такой, что

$$\mathrm{Orb}_\varphi(x\pi) \cap Y = \varnothing.$$

Из предыдущего замечания и равенства $\mathrm{Orb}_\psi(x)\pi = \mathrm{Orb}_\varphi(x\pi)$ следует, очевидно, что π-прообраз X подгруппы $X = Y\pi^{-1}$ является в этом случае искомой подгруппой.

Остается рассмотреть случай, когда $x \in N$. В этом случае ввиду нормальности подгруппы N ψ-орбита элемента x содержится в N, причем все элементы орбиты отличны от 1. Группа G_1 $\mathcal{F}$-аппроксимируема, так как она является расширением конечной группы N при помощи $\mathcal{SF}$-аппроксимируемой группы G. Поэтому группа G_1 содержит такую нормальную подгруппу R конечного индекса, что $R \cap N = 1$. Пусть V – множество всех тождеств фактор-группы G_1/R и S – вербальная подгруппа группы G_1, определяемая множеством V. Тогда S содержится в подгруппе R, имеет конечный индекс в группе G_1 (так как многообразие, порождаемое конечной группой, локально конечно) и является вполне характеристической (и потому φ-допустимой) подгруппой группы G_1. Очевидно, что $\mathrm{Orb}_\psi(x) \cap S = \varnothing$, и требуемое утверждение полностью доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] J. M. Corson, Th. J. Ratkovich, "A strong form of residual finiteness for groups", *J. Group Theory*, **9** (2006), 497–505.

[2] А. И. Мальцев, "О гомоморфизмах на конечные группы", *Ученые записки Ивановского пед. ин-та*, **18** (1958), 49–60.

[3] P. R. Hewitt, "Extensions of residually finite groups", *J. Algebra*, **163** (1994), 757–772.

[4] Б. Чандлер, В. Магнус, *Развитие комбинаторной теории групп. Очерк истории развития идей*, Мир, М., 1985.

[5] А. И. Мальцев, "Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами", *Матем. сб.*, **8 (50)**:3 (1940), 405–422.

[6] S. Meskin, "Nonresidually finite one-relator groups", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 105–114.

[7] Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, Мир, М., 1980.

[8] Д. И. Молдаванский, "Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп", *Укр. матем. журн.*, **44** (1992), 842–845.

Д. И. Молдаванский
Ивановский государственный университет
E-mail: moldav@mail.ru

Поступило
20.06.2017