Математические заметки

Том 107 выпуск 5 май 2020

УДК 512.543

О нильпотентной аппроксимируемости групп с одним определяющим соотношением

Д. И. Молдаванский

Описаны все группы из семейства групп Баумслага–Солитэра, т.е. групп вида $G(m,n)=\langle a,b;\, a^{-1}b^m a=b^n\rangle$ (где m и n – ненулевые целые числа), для которых условие аппроксимируемости нильпотентными группами выполняется тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа p выполнено условие аппроксимируемости конечными p-группами. Оказалось, в частности, что группа $G(p^r,-p^r)$, где p – нечетное простое число и $r\geqslant 1$, аппроксимируема нильпотентными группами и не является аппроксимируемой конечными q-группами ни для какого простого числа q. Тем самым, получен ответ на вопрос о существовании обладающих таким свойством нециклических групп с одним определяющим соотношением, сформулированный Мак-Кароном в работе 1996 года. Приведено также простое доказательство анонсированного там же утверждения об аппроксимируемости конечными p-группами для некоторого простого числа p произвольной аппроксимируемой нильпотентными группами нециклической группы с одним определяющим соотношением, имеющей элементы конечного порядка.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: аппроксимируемость нильпотентными группами, аппроксимируемость конечными p-группами, группы с одним определяющим соотношением.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12253

1. Введение. Формулировка результатов. Пусть $\mathcal{K}$ – некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется *аппроксимируемой* группами из этого класса (короче, $\mathcal{K}$-*аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента $g\in G$ существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, образ элемента g при котором отличен от единицы. Подгруппа H группы G называется *отделимой* в классе $\mathcal{K}$ (короче, $\mathcal{K}$-*отделимой*), если для произвольного элемента $g\in G$, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента g не входит в образ подгруппы H.

Как обычно, через $\mathcal{F}$ обозначается класс всех конечных групп, через $\mathcal{F}_p$ – класс всех конечных p-групп и через $\mathcal{N}$ – класс всех нильпотентных групп.

Поскольку каждая конечная p-группа нильпотентна, произвольная $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой. Простые примеры показывают, что обратное утверждение, вообще говоря, не выполняется, но, тем не менее, в ряде случаев оно оказывается справедливым. Например, из результатов работы А. И. Мальцева [1] следует, что (обычное) свободное произведение двух неединичных конечно порожденных нильпотентных групп является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого p. Для конструкции обобщенного свободного произведения аналог этого утверждения не имеет места: в статье Е. А. Ивановой [2] построен пример свободного произведения с объединенной подгруппой двух неединичных конечных абелевых групп, являющегося $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой и не являющегося $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой ни для какого простого p. С другой стороны, в той же работе доказано, что для свободного произведения с объединенной конечной подгруппой двух конечно порожденных нильпотентных групп, периодические части которых являются p-группами для некоторого простого p, свойства $\mathcal{N}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости равносильны. Д. Н. Азаров [3] доказал, что равносильность условий $\mathcal{N}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для некоторого простого p справедлива для любой группы, являющейся свободным произведением двух свободных групп с объединенной циклической подгруппой. В статье Е. Д. Логиновой [4], где были установлены критерии $\mathcal{F}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для свободного произведения $G = (A * B;\, [H, K] = 1)$ групп A и B с коммутирующими подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$ (т.е. фактор-группы свободного произведения $A * B$ групп A и B по нормальному замыканию взаимного коммутанта подгрупп H и K), показано, что если A и B – неединичные конечно порожденные нильпотентные группы без кручения, то для группы G равносильность рассматриваемых условий имеет место. Там же приведен пример двух неединичных конечных абелевых групп A и B (и их подгрупп H и K) таких, что соответствующая группа $G = (A * B;\, [H, K] = 1)$ является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой и не является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой ни для какого простого p.

Здесь вопрос о равносильности условий $\mathcal{N}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для некоторого простого p рассматривается для групп с одним определяющим соотношением. Одно семейство групп с одним определяющим соотношением, для которых эта равносильность имеет место, доставляется приведенным выше результатом Д. Н. Азарова. Два других семейства групп, определяемых единственным соотношением, рассматривал Мак-Карон [5], доказавший, что если нециклическая группа, определяемая одним соотношением и обладающая нетривиальным центром, $\mathcal{N}$-аппроксимируема, то она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p, и анонсировавший справедливость аналогичного утверждения для всех нециклических групп с одним определяющим соотношением, обладающих элементами конечного порядка. В той же статье сформулирован вопрос, существует ли $\mathcal{N}$-аппроксимируемая нециклическая группа с одним определяющим соотношением, не являющаяся $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой ни для какого простого числа p?

В данной статье будет показано, что такие группы существуют, а именно, будет показано, что соответствующим свойством обладают некоторые группы из семейства групп Баумслага–Солитэра.

Напомним, что *группами Баумслага–Солитэра* называются введенные в рассмотрение в работе [6] группы вида

$$G(m, n) = \langle a, b;\, a^{-1}b^m a = b^n \rangle,$$

где m и n – ненулевые целые числа. Так как группа $G(m,n)$ изоморфна, очевидно, каждой из групп $G(-m,-n)$ и $G(n,m)$, без потери общности можем (и всюду ниже будем) считать, что определяющие ее числовые параметры m и n удовлетворяют условиям $|n| \geqslant m > 0$.

Поскольку любая конечно порожденная $\mathcal{N}$-аппроксимируемая группа является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой, при выяснении того, для каких групп вида $G(m,n)$ равносильность условий $\mathcal{N}$-аппроксимируемости и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости для некоторого простого p имеет место, а для каких нет, достаточно рассматривать лишь $\mathcal{F}$-аппроксимируемые группы. Критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости групп этого семейства формулируется следующим образом.

Предложение 1 (см. [7]). *Группа $G(m,n)$ является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда или $m = 1$, или $|n| = m$.*

Условия $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости групп вида $G(m,n)$ были установлены в работе [8] как следствия полученных в ней условий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости некоторых HNN-расширений групп. Прямое доказательство предложения 2 (как и предложения 1) приведено в статье [9].

Предложение 2. *Для любого простого числа p выполнены следующие утверждения:*

1) *группа $G(1,n)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $n \equiv 1 \pmod p$;*
2) *группа $G(m,m)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $m = p^r$ для некоторого $r \geqslant 0$;*
3) *группа $G(m,-m)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда $p = 2$ и $m = 2^r$ для некоторого $r \geqslant 0$.*

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Следующие утверждения об $\mathcal{F}$-аппроксимируемых группах Баумслага–Солитэра справедливы:*

1) *группа $G(1,n)$ является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p;*
2) *группа $G(m,m\varepsilon)$, где $\varepsilon = \pm 1$, $\mathcal{N}$-аппроксимируема, тогда и только тогда, когда m является степенью некоторого простого числа.*

Отсюда и из предложения 2 получаем

Следствие. *Группа $G(m,n)$ $\mathcal{N}$-аппроксимируема, но не является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой ни для какого простого числа p тогда и только тогда, когда $m = q^r$ и $n = -q^r$, где q – нечетное простое число и $r \geqslant 1$.*

Публикаций с доказательством анонсированного в [5] утверждения о группах с одним определяющим соотношением, обладающих кручением, найти не удалось. Поэтому в данной статье приводится и (весьма простое) доказательство этого факта.

Описание групп с одним определяющим соотношением, обладающих кручением, было получено в статье [10] (см. также [11]), где было доказано, что группа G с одним определяющим соотношением обладает элементами конечного порядка тогда и только тогда, когда она задается представлением вида

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_m;\, w^n = 1\rangle,$$

где $n > 1$ и w – непустое циклически несократимое слово. Если, к тому же, слово w не является истинной степенью в свободной группе $F = \langle a_1, a_2, \dots, a_m\rangle$, то порядок элемента w равен n и произвольный элемент конечного порядка группы G сопряжен в этой группе с некоторой степенью элемента w.

Теорема 2. *Если нециклическая группа, определяемая единственным соотношением и обладающая элементами конечного порядка, является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой, то она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого числа p.*

Более подробно, для любой нециклической группы вида

$$G = \langle a_1, a_2, \dots, a_m;\, w^n = 1\rangle,$$

где $n > 1$ и w – непустое циклически несократимое слово, не являющееся истинной степенью, следующие утверждения справедливы:

1) *если группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема, то число n является степенью некоторого простого числа;*
2) *Если $n = p^r$, где p – простое число и $r > 0$, и группа G $\mathcal{N}$-аппроксимируема, то она является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой;*

В связи с утверждением 2 этой теоремы следует отметить существование групп вида $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_m;\, w^{p^r} = 1\rangle$ (где p простое и $r > 0$), не являющихся $\mathcal{N}$-аппроксимируемыми. Например, не является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группа

$$G = \langle a, b;\, (a^{-1}bab^{-2})^2 = 1\rangle,$$

так как пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(G)$ всех членов ее нижнего центрального ряда содержит отличный от единицы элемент b^2.

Действительно, определяющее слово $(a^{-1}bab^{-2})^2$ этой группы по модулю ее коммутанта сравнимо с элементом b^{-2}, так что включение $b^2 \in \gamma_2(G)$ выполнено.

Предположив, что для некоторого $n \geqslant 2$ выполнено включение $b^2 \in \gamma_n(G)$, будем иметь включения $[a, b^2] \in \gamma_{n+1}(G)$ и $[a^{-1}ba, b^2] \in \gamma_{n+1}(G)$, из которых вытекает сравнение

$$(a^{-1}bab^{-2})^2 \equiv (a^{-1}b^2a)b^{-4} \equiv b^{-2} \pmod{\gamma_{n+1}(G)},$$

означающее справедливость включения $b^2 \in \gamma_{n+1}(G)$.

Легко видеть, с другой стороны, что если слово w является примитивным элементом свободной группы $F = \langle a_1, a_2, \dots, a_m\rangle$, то группа $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_m;\, w^{p^r} = 1\rangle$ $\mathcal{N}$-аппроксимируема.

2. Предварительные замечания и вспомогательные утверждения. Начнем с формулировки трех утверждений, справедливость которых, по-видимому, хорошо известна и проверяется непосредственно.

Предложение 3. *Для любого класса групп $\mathcal{K}$ следующие утверждения справедливы:*

1) *в любой $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группе централизатор произвольного множества ее элементов является $\mathcal{K}$-отделимой подгруппой; в частности, центр $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы является $\mathcal{K}$-отделимой подгруппой;*
2) *если класс $\mathcal{K}$ гомоморфно замкнут, то в любой группе G нормальная подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H $\mathcal{K}$-аппроксимируема;*

3) *если класс $\mathcal{K}$ наследственен и мультипликативно замкнут, то в любой группе семейство всех нормальных подгрупп, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{K}$, замкнуто относительно операции пересечения любых конечных семейств подгрупп.*

При этом, напомним, класс групп $\mathcal{K}$ называется *наследственным*, если вместе с каждой группой он содержит и все ее подгруппы. Класс $\mathcal{K}$ называется *гомоморфно замкнутым*, если вместе с каждой группой он содержит и все ее гомоморфные образы. Класс $\mathcal{K}$ называется *мультипликативно замкнутым*, если прямое произведение произвольного конечного семейства групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит этому классу.

Поскольку класс всех нильпотентных групп обладает каждым из перечисленных свойств, для него выполнены все утверждения предложения 3.

Следующее необходимое нам утверждение вытекает из полученных А.И. Мальцевым в статье [1] условий $\mathcal{N}$-аппроксимируемости свободного произведения групп.

Предложение 4. *Свободное произведение бесконечной циклической группы и конечной циклической группы порядка m является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда $m = p^r$ для некоторого простого p и некоторого $r \geqslant 0$.*

Отметим, далее, что произвольная группа Баумслага–Солитэра $G(m,n)$ является HNN-расширением с проходной буквой a бесконечной циклической группы B, порождаемой элементом b, и связанными (в соответствии с очевидным изоморфизмом) подгруппами B^m и B^n. Очевидно, что если $|n| = m$, то B^m является нормальной подгруппой группы $G(m,n)$.

Предложение 5. *Пусть $\mathcal{K}$ – произвольный класс групп. Если группа $G = G(m, m\varepsilon)$, где $m > 1$ и $\varepsilon = \pm 1$, $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то ее подгруппа B^m является $\mathcal{K}$-отделимой.*

Доказательство. Действительно, так как при $\varepsilon = 1$ подгруппа B^m совпадает с центром группы G, в этом случае требуемое утверждение является непосредственным следствием предложения 3. Из того же предложения 3 вытекает справедливость утверждения предложения 5 и в случае $\varepsilon = -1$, так как в группе $G(m,-m)$ подгруппа B^m совпадает с централизатором $C_G(M)$ множества $M = \{x^2 \mid x \in G\}$ квадратов всех элементов этой группы.

В самом деле, поскольку для любого $g \in G$ имеем

$$g^{-2} b^m g^2 = g^{-1} b^{\pm m} g = b^m,$$

включение $B^m \subseteq C_G(M)$ выполнено. Для доказательства противоположного включения предположим, что элемент $g \in G$ не принадлежит подгруппе B^m, так что в фактор-группе G/B^m его образ gB^m отличен от единицы.

Группа $G/B^m = \langle a, b;\, b^m = 1\rangle$ раскладывается в свободное произведение бесконечной циклической подгруппы (aB^m), порождаемой элементом aB^m, и циклической подгруппы B/B^m порядка $m > 1$. Легко видеть, что в любой группе, разложимой в свободное произведение, элемент, перестановочный с неединичным элементом некоторого свободного сомножителя, должен принадлежать этому сомножителю.

Поэтому если элемент gB^m не принадлежит подгруппе (aB^m), то он не перестановочен с ее элементом $(aB^m)^2$, а если gB^m входит в подгруппу $\bigl(aB^m\bigr)$, то он не перестановочен с элементом $((ab)B^m)^2$, не принадлежащем этой подгруппе, поскольку его длина равна 4.

Таким образом, в группе G каждый элемент g, не входящий в подгруппу B^m, не коммутирует хотя бы с одним из элементов a^2 и $(ab)^2$ и потому не входит в подгруппу $C_G(M)$. Равенство $B^m = C_G(M)$ доказано, и доказательство предложения 5 закончено.

Для доказательства теоремы 2 в дополнение к приведенной во Введении информации о строении групп с одним определяющим соотношением, обладающих элементами конечного порядка, нам потребуется

Предложение 6 (см. [10; теорема 4]). *Пусть группа G задана представлением*

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m;\ w^n = 1\rangle,$$

где $n > 1$ и w – непустое циклически несократимое слово, не являющееся истинной степенью в свободной группе $F = \langle a_1, a_2, \dots, a_m\rangle$, и пусть H подгруппа группы G, порожденная элементом w. Тогда для любого элемента $g \in G$ из того,что $g^{-1}Hg \cap H \neq 1$, следует включение $g \in H$.

Из предложения 6 вытекает

Предложение 7. *Пусть группа G и ее подгруппа H те же, что в предложении 6. Тогда для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего подгруппе H, и для любых целых чисел r и s, не делящихся на n, коммутатор $[g^{-1}w^r g, w^s]$ отличен от 1.*

В самом деле, если, напротив, предположить, что $[g^{-1}w^r g, w^s] = 1$, то пересечению подгрупп $(g^{-1}w^r g)^{-1}H(g^{-1}w^r g)$ и H будет принадлежать неединичный элемент w^s, и потому в силу предложения 6 $g^{-1}w^r g = w^q$ для некоторого целого числа q. Это означает, что в подгруппу $g^{-1}Hg \cap H$ входит неединичный элемент w^q, откуда следует включение $g \in H$, противоречащее условию предложения.

3. Доказательство теоремы 1. Справедливость первого утверждения теоремы 1 устанавливается без труда. Начнем с того, что пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(G)$ всех членов нижнего центрального ряда группы $G = G(1,2)$ содержит отличный от единицы элемент b, и потому эта группа не является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой.

Действительно, поскольку определяющее соотношение этой группы равносильно равенству $b = [b,a]$, при $n = 2$ включение $b \in \gamma_n(G)$ выполнено. Очевидные индуктивные соображения, использующие то же равенство, доказывают справедливость его для любого $n \geqslant 2$.

Таким образом, из предположения о том, что группа $G(1,n)$ является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой, вытекает, что $n \neq 2$ и потому число $n-1$ отлично от ± 1. Следовательно, $n-1$ обладает хотя бы одним простым делителем p, и в силу пункта 1 предложения 2 группа $G(1,n)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

Так как свободная абелева группа $G(1,1)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема при любом простом p, а группа $G(1,-1)$ является в силу, например, того же утверждения предложения 2 $\mathcal{F}_2$-аппроксимируемой, то доказательство справедливости второго утверждения теоремы для групп вида $G(m, m\varepsilon)$, где $\varepsilon = \pm 1$, можно провести, предполагая, что $m > 1$.

Если группа $G = G(m, m\varepsilon)$ является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой, то в силу предложения 5 и пункта 2 предложения 3 фактор-группа $G/B^m = \langle a, b;\, b^m = 1\rangle$ группы G по подгруппе B^m также $\mathcal{N}$-аппроксимируема. Поскольку группа G/B^m является свободным произведением бесконечной циклической группы и циклической группы порядка m, из предложения 4 следует, что m должно быть степенью некоторого простого числа p.

Обратно, покажем, что для любого простого числа p и любых чисел $k \geqslant 0$ и $\varepsilon = \pm 1$ группа $G = G(p^k, p^k\varepsilon)$, является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой.

Если неединичный элемент $g \in G$ не принадлежит подгруппе B^{p^k}, то его образ в фактор-группе $G/B^{p^k} = \langle a, b;\, b^{p^k} = 1\rangle$ отличен от 1. Так как эта фактор-группа в силу предложения 4 $\mathcal{N}$-аппроксимируема, существование гомоморфизма группы G на нильпотентную группу, при котором образ элемента g отличен от 1, в этом случае становится очевидным. Если же $g \in B^{p^k}$, то рассмотрим гомоморфизм группы G на группу $G(1, \varepsilon)$, определяемый тождественным отображением порождающих. Поскольку на подгруппе B^{p^k} он действует инъективно и группа $G(1, \varepsilon)$, как отмечено выше, $\mathcal{N}$-аппроксимируема, существование требуемого гомоморфизма группы G на нильпотентную группу опять очевидно.

Все утверждения теоремы 1 доказаны.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть нециклическая группа

$$G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_m;\, w^n = 1\rangle,$$

где $n > 1$ и w – непустое циклически несократимое слово, не являющееся истинной степенью, $\mathcal{N}$-аппроксимируема. Если n не является степенью простого числа, то $n = rs$ для некоторых отличных от 1 взаимно простых натуральных чисел r и s. Так как группа G не является циклической, в ней существует элемент g, не входящий в подгруппу H, порождаемую элементом w, и потому в силу предложения 7 коммутатор $[g^{-1}w^r g, w^s]$ отличен от 1.

С другой стороны, поскольку порядки элементов $g^{-1}w^r g$ и w^s равны числам s и r соответственно (и так как в любой нильпотентной группе элементы взаимно простых порядков перестановочны), образ этого коммутатора при любом гомоморфизме группы G на нильпотентную группу равен 1. Так как это противоречит предположению об $\mathcal{N}$-аппроксимируемости группы G, утверждение о том, что $n = p^k$ для некоторого простого p и некоторого $k > 0$, доказано.

Предположим теперь, что группа вида $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_m;\, w^{p^r} = 1\rangle$ является $\mathcal{N}$-аппроксимируемой, и покажем, что тогда для любого неединичного элемента g этой группы существует гомоморфизм ее на конечную p-группу, при котором образ элемента g отличен от 1.

Если этот элемент не входит в подгруппу H, то в силу предложения 7 коммутатор $[g, w]$ отличен от единицы. Из $\mathcal{N}$-аппроксимируемости группы G следует (с учетом пункта 3 предложения 3), что в ней существует нормальная подгруппа N такая, что фактор-группа G/N является конечной нильпотентной группой, коммутатор $[g, w]$ не входит в N и $H \cap N = 1$. Тогда образ $g\varphi$ элемента g относительно естественного гомоморфизма $\varphi\colon G \to G/N$ отличен от единицы. Фактор-группа G/N является прямым произведением своих подгрупп P и R , где P – ее силовская p-подгруппа, а R – произведение остальных силовских подгрупп. Если образ элемента $g\varphi$ относительно проектирования π группы G/N на подгруппу P равен 1, то этот элемент принадлежит подгруппе R и потому перестановочен с (принадлежащим подгруппе P) элементом $w\varphi$, что невозможно в силу выбора подгруппы N. Следовательно, $(g\varphi)\pi \neq 1$, и произведение $\varphi\pi$ является для элемента g искомым гомоморфизмом.

Кроме того, поскольку гомоморфизм φ на подгруппе H действует инъективно, $H\varphi \subseteq P$ и проектирование π на подгруппе $H\varphi$ также действует инъективно, образ любого неединичного элемента из подгруппы H при том же гомоморфизме $\varphi\pi$ также отличен от 1.

Теорема 2 доказана.

Автор благодарен рецензенту, чьи замечания привели к значительному улучшению текста статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. И. Мальцев, "Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы", *Матем. сб.*, **25 (67)**:3 (1949), 347–366.

[2] Е. А. Иванова, "Аппроксимируемость нильпотентными группами свободного произведения двух групп с объединенными конечными подгруппами", *Вестн. Ивановского гос. ун-а. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика*, 2004, № 3, 120–125.

[3] Д. Н. Азаров, "О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением", *Матем. заметки*, **64**:1 (1998), 3–8.

[4] Е. Д. Логинова, "Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами", *Сиб. матем. журн.*, **40**:2 (1999), 395–407.

[5] J. McCarron, "Residually nilpotent one-relator groups with nontrivial centre", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124** (1996), 1–5.

[6] G. Baumslag, D. Solitar, "Some two-generator one-relator non-Hopfian groups", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 199–201.

[7] S. Meskin, "Nonresidually finite one-relator groups", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 105–114.

[8] Д. И. Молдаванский, "Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений", *Вестн. Ивановского гос. ун-а. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика*, 2000, № 3, 129–140.

[9] D. Moldavanskii, "On the residual properties of Baumslag–Solitar groups", *Comm. Algebra*, **46**:9 (2018), 3766–3778.

[10] A. Karrass, W. Magnus, D. Solitar, "Elements of finite order in groups with a single defining Relation", *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 57–66.

[11] В. Магнус, А. Каррасс, Д. Солитер, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, М., 1974.

Д. И. Молдаванский
Ивановский государственный университет
E-mail: moldav@mail.ru

Поступило
20.11.2018
После доработки
25.04.2019
Принято к публикации
22.05.2019