Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2020, № 3, с. 48–63 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Е.В. СОКОЛОВ, Е.А. ТУМАНОВА

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП С НОРМАЛЬНЫМИ ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Аннотация. Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, G — свободное произведение групп A и B с объединенными подгруппами H и K. Пусть также подгруппа H нормальна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B и $\operatorname{Aut}_G(H)$ обозначает множество автоморфизмов группы H, индуцированных всевозможными внутренними автоморфизмами группы G. Доказан критерий $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G при условии, что группа $\operatorname{Aut}_G(H)$ абелева или удовлетворяет некоторым другим условиям. Указаны применения этого результата в случаях, когда A, B — ограниченные нильпотентные группы или $A/H, B/K \in \mathcal{K}$.

Ключевые слова: обобщенное свободное произведение, финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость конечными p-группами, аппроксимируемость разрешимыми группами, аппроксимируемость корневыми классами групп.

УДК: 512.543

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-3-48-63

1. Введение

Напомним, что группа X называется *аппроксимируемой* некоторым *классом групп* $\mathcal{L}$ (*$\mathcal{L}$-аппроксимируемой*), если для каждого неединичного элемента $x \in X$ найдется гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{L}$ (*$\mathcal{L}$-группу*), переводящий x в неединичный элемент. Обобщением аппроксимируемости служит понятие отделимости подгрупп, введенное А.И. Мальцевым в [1]: подгруппа Y группы X называется *отделимой* в этой группе *классом групп* $\mathcal{L}$ (*$\mathcal{L}$-отделимой*), если для каждого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{L}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$. Очевидно, что $\mathcal{L}$-аппроксимируемость группы X равносильна $\mathcal{L}$-отделимости ее единичной подгруппы. Более сложные взаимосвязи между этими понятиями возникают при изучении аппроксимируемости различных теоретико-групповых конструкций. Если при построении конструкции объединяются некоторые подгруппы составляющих данную конструкцию групп, то их отделимость в указанных группах зачастую оказывается одним из достаточных, а иногда и необходимых условий аппроксимируемости конструкции в целом. Примером этому служат и результаты настоящей статьи.

Если X и $\mathcal{L}$ — некоторые группа и класс групп, то через $\mathcal{L}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат

Поступила в редакцию 11.03.2019, после доработки 25.04.2019. Принята к публикации 19.06.2019.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00187.

классу $\mathcal{L}$. Очевидно, подгруппы из семейства $\mathcal{L}^*(X)$ — это в точности ядра всевозможных гомоморфизмов группы X на группы из класса $\mathcal{L}$. Поэтому подгруппа Y группы X является $\mathcal{L}$-отделимой тогда и только тогда, когда для каждого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $x \notin YN$. В частности, группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема в том и только том случае, если для всякого ее неединичного элемента существует не содержащая данного элемента подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(X)$. Указанные соображения далее будут использоваться без специальных оговорок.

В настоящей статье изучается аппроксимируемость обобщенных свободных произведений произвольным корневым классом групп, замкнутым относительно факторизации, т. е. взятия фактор-групп. Понятие корневого класса было введено К. Грюнбергом [2]. Наибольший эффект оно дает при исследовании аппроксимируемости свободных конструкций групп, позволяя провести значительную часть рассуждений однократно с использованием лишь незначительного числа общих свойств аппроксимирующих классов [2]–[13].

Согласно [2] класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет следующему условию, которое сейчас обычно называют *условием Грюнберга*: если $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд некоторой группы X, факторы X/Y и Y/Z которого принадлежат классу $\mathcal{K}$, то найдется подгруппа $T \in \mathcal{K}^*(X)$, лежащая в Z. Как уже было сказано выше, условия, собранные в определении корневого класса (особенно в сочетании с требованием замкнутости относительно факторизации), достаточны для проведения значительной части рассуждений общего характера при изучении аппроксимируемости таким классом свободных конструкций групп. Однако, глядя на эти условия, сложно понять, что представляют собой корневые классы групп в целом. Равносильные определения, упрощающие данную задачу, содержатся в приводимом далее предложении 1. Из него легко следует, в частности, что пересечение любого числа корневых классов — снова корневой класс.

Предложение 1 ([5], теорема 1)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *класс $\mathcal{K}$ является корневым;*
2) *класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия декартовых сплетений;*
3) *класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия расширений и вместе с любыми двумя группами X, Y содержит декартово произведение $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$.*

К числу корневых относится довольно много классов групп, аппроксимируемость которыми чаще всего рассматривается в литературе. Среди них класс всех конечных групп, конечных p-групп (где p — некоторое простое число), периодических π-групп конечного периода (где π — непустое множество простых чисел), разрешимых групп, всех групп без кручения, а также всевозможные их пересечения. Поэтому получение нового результата об аппроксимируемости произвольным корневым классом групп достаточно часто позволяет обобщить или дополнить сразу несколько известных утверждений.

В самом общем виде вопрос об аппроксимируемости не только произвольным, но и конкретными корневыми классами групп удалось решить лишь для одной свободной конструкции — обычного свободного произведения групп [2], [3]. Аппроксимируемость более сложно устроенного обобщенного свободного произведения двух групп, как правило, исследуют при некоторых дополнительных ограничениях, накладываемых на перемножаемые группы, объединяемые подгруппы и склеивающий эти подгруппы изоморфизм (см., например, [3],

[5], [8]–[10], [13]). Настоящая статья продолжает работу [8], в этих работах таким ограничением служит нормальность объединяемых подгрупп в свободных множителях. Полученные здесь результаты обобщают и дополняют ряд утверждений, доказанных в [8], [10] и [14].

2. Формулировка результатов

До конца статьи будем предполагать, что $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$ — свободное произведение некоторых групп A, B с подгруппами $H \leqslant A$, $K \leqslant B$, объединенными относительно изоморфизма $\varphi\colon H \to K$ (используемая здесь и далее терминология, касающаяся конструкции обобщенного свободного произведения двух групп, согласована с [15]). Будем считать также, что H — нормальная подгруппа группы A, K — нормальная подгруппа группы B и все рассматриваемые корневые классы групп являются нетривиальными, т. е. содержат хотя бы одну неединичную группу.

Легко видеть, что если Y — нормальная подгруппа некоторой группы X, то множество $\mathrm{Aut}_X(Y)$ автоморфизмов подгруппы Y, служащих ограничениями на эту подгруппу всевозможных внутренних автоморфизмов группы X, является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\,Y$. Так как H, K — нормальные подгруппы групп A, B соответственно, обе они оказываются нормальными в группе G, что позволяет рассмотреть группу $\mathrm{Aut}_G(H)$. На важную роль последней при описании условий аппроксимируемости обобщенного свободного произведения впервые обратил внимание Г. Хигман [16]. В некоторых случаях (см., например, [8], теорема 3) аппроксимируемость группы G однозначно определяется свойствами группы $\mathrm{Aut}_G(H)$. В настоящей статье рассматривается, главным образом, ситуация, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой или совпадает с одной из своих подгрупп $\mathrm{Aut}_A(H)$ и $\varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$. Последнее имеет место, в частности, если одна из подгрупп H и K лежит в центре соответствующего свободного множителя.

Общий подход к исследованию аппроксимируемости обобщенных свободных произведений был предложен Г. Баумслагом [17] и получил название “фильтрационного”. Первоначально предназначенный для изучения аппроксимируемости классом всех конечных групп (называемой обычно *финитной*), этот подход был затем распространен на случаи аппроксимируемости классом конечных p-групп [18], классом конечных π-групп [19] и, наконец, произвольным корневым классом групп [8]. Напомним, что семейство $\{Y_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ нормальных подгрупп некоторой группы X называется *фильтрацией*, если $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} Y_i = 1$. Следуя [17], будем говорить также, что подгруппы $R \leqslant A$, $S \leqslant B$ являются (H,K,φ)-*совместимыми*, если $(R \cap H)\varphi = S \cap K$.

В целях упрощения формулировок утверждений будем говорить, что класс $\mathcal{K}$ и группа G *удовлетворяют набору условий* $\mathfrak{S}$, если $\mathcal{K}$ — нетривиальный корневой класс групп, замкнутый относительно факторизации, подгруппа H нормальна в группе A, подгруппа K нормальна в группе B, $H \neq A$ и $K \neq B$. С использованием введенных понятий и обозначений основной результат настоящей статьи может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. *Пусть класс $\mathcal{K}$ и группа G удовлетворяют набору условий $\mathfrak{S}$, $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H,K,φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно. Если группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой или совпадает с одной из подгрупп $\mathrm{Aut}_A(H)$, $\varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

1) *семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями,*
2) *подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

Наибольшую сложность в процессе применения теоремы 1 представляет проверка условия 1), так как его справедливость зависит не только от свойств групп A и B, но и от того, как объединяются подгруппы H, K. Приводимые далее следствия описывают ситуации, когда условие 1) заведомо выполняется.

Следствие 1. *Пусть класс $\mathcal{K}$ и группа G удовлетворяют набору условий $\mathfrak{S}$, A — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, $B/K \in \mathcal{K}$. Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) *подгруппы H и K являются циклическими,*
2) $\operatorname{Aut}_G(H) = \operatorname{Aut}_A(H)$,

то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A.

Чтобы сформулировать еще одно следствие, потребуется ввести ряд вспомогательных определений.

Пусть π — непустое множество простых чисел. Следуя [20], абелеву группу будем называть *π-ограниченной*, если в каждой ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части, соответствующие числам из множества π, конечны. Нильпотентную (разрешимую) группу назовем *π-ограниченной*, если она обладает конечным центральным (соответственно субнормальным) рядом с π-ограниченными абелевыми факторами. Легко видеть, что полициклические и конечно порожденные нильпотентные группы являются соответственно π-ограниченными разрешимыми и π-ограниченными нильпотентными при любом выборе множества π.

Если $\mathcal{L}$ — некоторый класс групп, то через $\pi(\mathcal{L})$ будем обозначать множество всех простых делителей конечных порядков элементов всевозможных $\mathcal{L}$-групп. Отметим, что в силу сделанных выше предположений класс $\mathcal{K}$ нетривиален. Следовательно, он содержит некоторую неединичную циклическую группу и все ее фактор-группы, а потому множество $\pi(\mathcal{K})$ заведомо не является пустым.

Следствие 2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ и группа G удовлетворяют набору условий $\mathfrak{S}$, A — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная нильпотентная группа. Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) *подгруппы H, K являются циклическими,*
2) $\operatorname{Aut}_G(H) = \operatorname{Aut}_A(H)$,

то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.

Если дополнительные ограничения из следствий 1, 2 применить не только к группе B, но и к A, то условия, накладываемые на объединенные подгруппы и, в частности, на группу $\operatorname{Aut}_G(H)$, можно значительно ослабить.

Теорема 2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ и группа G удовлетворяют набору условий $\mathfrak{S}$, H, K — $\mathcal{K}$-аппроксимируемые группы, $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$. Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\operatorname{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$,
2) $\operatorname{Aut}_G(H)$ — *абелева группа,*
3) $\operatorname{Aut}_G(H) = \operatorname{Aut}_A(H)$ *или* $\operatorname{Aut}_G(H) = \varphi \operatorname{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$,

то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Теорема 3. *Пусть класс $\mathcal{K}$ и группа G удовлетворяют набору условий $\mathfrak{S}$, A, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемые $\pi(\mathcal{K})$-ограниченные нильпотентные группы. Если выполняется хотя бы одно из условий:*

1) $\operatorname{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$,

2) $\mathrm{Aut}_G(H)$ — *абелева группа,*
3) $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$ *или* $\mathrm{Aut}_G(H) = \varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$,

то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.

Отметим, что теорема 1 и следствия 1, 2 существенным образом обобщают теорему 4 и следствия 4, 5 из [8], а теорема 3 служит частичным обобщением теорем 1, 2 из [14] и теоремы 3 из [10]. В качестве комментария к формулировкам теоремы 3 и следствия 2 отметим также, что известны достаточно легко проверяемые критерии $\mathcal{K}$-аппроксимируемости $\pi(\mathcal{K})$-ограниченной нильпотентной группы и $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы такой группы (см. предложения 15, 16 и 21 ниже).

Остальная часть статьи посвящена доказательству теорем 1–3 и следствий 1, 2.

3. Некоторые вспомогательные утверждения

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — произвольная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *пересечение конечного числа подгрупп семейства $\mathcal{L}^*(X)$ снова является подгруппой данного семейства;*
2) *если группа X $\mathcal{L}$-аппроксимируема и Y — ее конечная подгруппа, то существует подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Y \cap N = 1$.*

Доказательство. Действительно, если N_1, N_2, …, N_k — подгруппы семейства $\mathcal{L}^*(X)$, то по теореме Ремака (см., например, [21], теорема 4.3.9) фактор-группа

$$X/(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k)$$

вкладывается в прямое произведение фактор-групп $X/N_1, X/N_2, \ldots, X/N_k$ и в силу условий, наложенных на класс $\mathcal{L}$, принадлежит этому классу.

Пусть Y — конечная подгруппа группы X. Пользуясь $\mathcal{L}$-аппроксимируемостью последней, выберем для каждого неединичного элемента $y \in Y$ не содержащую его подгруппу $N_y \in \mathcal{L}^*(X)$ и обозначим через N пересечение всех таких подгрупп. Так как подгруппа Y конечна, то в силу утверждения 1) справедливо включение $N \in \mathcal{L}^*(X)$. Очевидно также, что $Y \cap N = 1$. □

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа.*

1) *Если фактор-группа X/Y $\mathcal{L}$-аппроксимируема, то подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X.*
2) *Если класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации, то из $\mathcal{L}$-отделимости подгруппы Y в группе X следует $\mathcal{L}$-аппроксимируемость фактор-группы X/Y.*

Доказательство. Пусть сначала фактор-группа X/Y $\mathcal{L}$-аппроксимируема и x — произвольный элемент группы X, не принадлежащий подгруппе Y. Тогда xY — неединичный элемент $\mathcal{L}$-аппроксимируемой группы X/Y. Следовательно, существует подгруппа $N/Y \in \mathcal{L}^*(X/Y)$ такая, что $xY \notin N/Y$. Тогда $N \in \mathcal{L}^*(X)$, $x \notin N$ и, так как $Y \leqslant N$, то $x \notin YN$. В силу произвольности выбора элемента x это означает, что подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X.

Предположим теперь, что подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X, класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации и xY — произвольный неединичный элемент фактор-группы X/Y.

Тогда элемент x не содержится в подгруппе Y и ввиду $\mathcal{L}$-отделимости последней в группе X найдется подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $x \notin YN$, а потому $xY \notin YN/Y$. Так как $N \in \mathcal{L}^*(X)$ и класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно факторизации, то

$$(X/Y)/(YN/Y) \cong X/YN \cong (X/N)/(YN/N) \in \mathcal{L}.$$

Следовательно, $YN/Y \in \mathcal{L}^*(X/Y)$ и ввиду произвольности выбора элемента xY фактор-группа X/Y $\mathcal{L}$-аппроксимируема. □

Если $\mathcal{L}$ — некоторый класс групп, X — произвольная группа, Y — подгруппа группы X, то через $\mathcal{L}^*(X, Y)$ будем обозначать семейство всех подгрупп группы Y вида $Z \cap Y$, где Z — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(X)$.

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, X — некоторая группа, Y — подгруппа группы X. Тогда $\mathcal{L}^*(X, Y) \subseteq \mathcal{L}^*(Y)$.*

Доказательство. Действительно, если $N \in \mathcal{L}^*(X)$ и $M = N \cap Y$, то M — нормальная подгруппа группы Y и $Y/M = Y/Y \cap N \cong YN/N \leqslant X/N$. Так как $X/N \in \mathcal{L}$ и класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то $Y/M \in \mathcal{L}$ и, следовательно, $M \in \mathcal{L}^*(Y)$. Ввиду произвольности выбора подгруппы $N \in \mathcal{L}^*(X)$ это означает, что $\mathcal{L}^*(X, Y) \subseteq \mathcal{L}^*(Y)$. □

Очевидно, если Y — нормальная подгруппа группы X, то каждая подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(X, Y)$ также нормальна в X (и принадлежит семейству $\mathcal{L}^*(Y)$, если класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп). Следуя [8], будем говорить, что группа X *$\mathcal{L}$-регулярна* по своей нормальной подгруппе Y, если верно обратное: для каждой подгруппы $M \in \mathcal{L}^*(Y)$, нормальной в группе X, существует подгруппа $N \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $N \cap Y = M$ (т. е. каждая подгруппа $M \in \mathcal{L}^*(Y)$, нормальная в X, принадлежит семейству $\mathcal{L}^*(X, Y)$).

Предложение 5. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия расширений. Если X — некоторая группа и $Y \in \mathcal{L}^*(X)$, то группа X $\mathcal{L}$-регулярна по подгруппе Y.*

Доказательство. Действительно, пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(Y)$, нормальная в группе X. Тогда фактор-группа X/M является расширением $\mathcal{L}$-группы Y/M при помощи $\mathcal{L}$-группы $(X/M)/(Y/M) \cong X/Y$ и, стало быть, принадлежит классу $\mathcal{L}$ ввиду замкнутости последнего относительно взятия расширений. Следовательно, $M \in \mathcal{L}^*(X)$ и, так как $M \leqslant Y$, то $M \cap Y = M$. □

Предложение 6 ([8], предложение 4)**.** *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп, замкнутый относительно факторизации, X — произвольная группа, Y — нормальная подгруппа группы X. Если существует подгруппа $Z \in \mathcal{L}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$, то $\mathrm{Aut}_X(Y) \in \mathcal{L}$.*

Предложение 7 ([2], лемма 1.5)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Тогда произвольное расширение $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группы при помощи группы из класса $\mathcal{K}$ в свою очередь аппроксимируется этим классом.*

4. Доказательство теоремы 1

Аналог “фильтрационной” теоремы Г. Баумслага [17], который лежит в основе доказательств почти всех теорем, которые можно найти в [8] и в этой статье, представляет

Предложение 8 ([8], предложение 12)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп.*

1) *Если группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ являются фильтрациями.*

2) *Если семейства $\mathcal{K}^*(G, A)$ и $\mathcal{K}^*(G, B)$ являются фильтрациями, подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Вопрос о том, при каких дополнительных ограничениях сформулированное в предложении 8 достаточное условие аппроксимируемости обобщенного свободного произведения G становится необходимым, подробно исследовался в [22]. Еще два случая, в которых это верно, указаны в предложении 9 ниже.

Напомним, что запись элемента $g \in G$ в виде $g = g_1 g_2 \ldots g_n$ называется *несократимой*, если каждый сомножитель g_i принадлежит множеству $A \cup B$ и при $n > 1$ соседние множители g_i и g_{i+1} не содержатся одновременно в A или в B. Основная теорема о свободных произведениях с объединенными подгруппами (см., например, [15], теорема 4.4) утверждает, что всякий элемент группы G, обладающий несократимой записью неединичной длины, отличен от единицы.

Предложение 9. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, группа G $\mathcal{L}$-аппроксимируема и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\mathrm{Aut}_G(H)$ *— абелева группа,*
2) $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$ *или* $\mathrm{Aut}_G(H) = \varphi \,\mathrm{Aut}_B(K) \varphi^{-1}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *если $K \neq B$, то подгруппа H $\mathcal{L}$-отделима в группе A;*
2) *если $H \neq A$, то подгруппа K $\mathcal{L}$-отделима в группе B.*

Доказательство. Утверждение 1) будем доказывать от противного. Пусть подгруппа H не является $\mathcal{L}$-отделимой в группе A. Тогда существует элемент $a \in A \setminus H$ такой, что для любой подгруппы $N \in \mathcal{L}^*(A)$ справедливо включение $a \in HN$. Так как K — собственная подгруппа группы B, можем выбрать элемент $b \in B \setminus K$. Обозначим через α и β ограничения на подгруппу H внутренних автоморфизмов группы G, производимых элементами a и b соответственно.

Сначала рассмотрим случай, когда группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой, и положим

$$g_1 = b^{-1}ab, \quad g_2 = a^{-1}b^{-1}aba, \quad g = [g_1, g_2].$$

Элемент g имеет несократимую запись длины шестнадцать и, стало быть, отличен от единицы. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G)$ и $N = M \cap A$. Согласно предложению 4 имеем $N \in \mathcal{L}^*(A)$, поэтому $a \in HN$ и $a \equiv h \pmod N$ для подходящего элемента $h \in H$. Так как $N \leqslant M$, то $a \equiv h \pmod M$ и, значит,

$$g_1 = b^{-1}ab = b^{-1}a^{-1}aab \equiv h\alpha\beta \pmod M,$$
$$g_2 = a^{-1}b^{-1}aba \equiv h\beta\alpha \pmod M.$$

Отсюда и из того, что $\mathrm{Aut}_G(H)$ — абелева группа, заключаем $g_1 \equiv g_2 \pmod M$ и потому $g \equiv 1 \pmod M$. Следовательно, неединичный элемент g группы G лежит в каждой подгруппе семейства $\mathcal{L}^*(G)$, что противоречит $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы G.

Теперь будем считать, что выполняется условие 2.

Пусть сначала $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$. Тогда $\beta = \widehat{a_0}|_H$ для некоторого элемента $a_0 \in A$. Рассмотрим элемент $g = a_0^{-1}a^{-1}a_0 b^{-1}ab$ группы G.

Так как $a \notin H$ и подгруппа H нормальна в группе A, то $a_0^{-1}a^{-1}a_0 \notin H$. Поэтому элемент g имеет несократимую запись длины 4 и, следовательно, отличен от единицы. Пусть снова M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G)$, $h \in H$ — такой элемент, что $a \equiv h \pmod M$.

Тогда

$$a_0^{-1}a^{-1}a_0b^{-1}ab \equiv a_0^{-1}h^{-1}a_0b^{-1}hb \pmod M.$$

Заметим, что $b^{-1}hb = h\beta = a_0^{-1}ha_0$. Следовательно,

$$g \equiv a_0^{-1}h^{-1}a_0a_0^{-1}ha_0 = 1 \pmod M,$$

откуда, как и выше, получаем противоречие с $\mathcal{L}$-аппроксимируемостью группы G.

Пусть теперь $\mathrm{Aut}_G(H) = \varphi\,\mathrm{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$ и $\alpha = \varphi\widehat{b_0}|_K\varphi^{-1}$ для некоторого элемента $b_0 \in B$. Рассмотрим элемент

$$g = \bigl(b_0^{-1}(b^{-1}a^{-1}b)b_0\bigr)\bigl(a^{-1}(b^{-1}ab)a\bigr) = (bb_0)^{-1}a^{-1}(bb_0)a^{-1}b^{-1}aba$$

группы G.

Длина несократимой записи элемента g равна восьми, если $bb_0 \notin K$, и не меньше четырех, если $bb_0 \in K$. Поэтому $g \neq 1$. Пусть, как и выше, M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(G)$, $h \in H$ — такой элемент, что $a \equiv h \pmod M$. Тогда $b^{-1}ab \equiv b^{-1}hb \pmod M$. Так как $h \in H$ и подгруппа H нормальна в G, то $b^{-1}hb \in H$ и $b_0^{-1}(b^{-1}hb)b_0 \in H$. Напомним также, что для любого элемента $x \in H$ в группе G верно равенство $x\varphi = x$. Поэтому

$$a^{-1}(b^{-1}hb)a = (b^{-1}hb)\alpha = \bigl(b_0^{-1}(b^{-1}hb)\varphi b_0\bigr)\varphi^{-1} = b_0^{-1}(b^{-1}hb)b_0$$

и

$$g \equiv \bigl(b_0^{-1}(b^{-1}h^{-1}b)b_0\bigr)\bigl(a^{-1}(b^{-1}hb)a\bigr) = \bigl(b_0^{-1}(b^{-1}h^{-1}b)b_0\bigr)\bigl(b_0^{-1}(b^{-1}hb)b_0\bigr) = 1 \pmod M,$$

что противоречит $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы G.

Утверждение 2) проверяется аналогично. $\square$

Для решения следующей задачи, описания семейств $\mathcal{K}^*(G,A)$ и $\mathcal{K}^*(G,B)$, потребуется ряд вспомогательных построений и утверждений.

Легко видеть, что если подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ (H,K,φ)-совместимы и нормальны в свободных множителях, то отображение $\varphi_{R,S}\colon HR/R \to KS/S$, действующее по правилу $(hR)\varphi_{R,S} = (h\varphi)S$, где $h \in H$, определено корректно и является изоморфизмом подгруппы HR/R фактор-группы A/R на подгруппу KS/S фактор-группы B/S. Это позволяет наряду с обобщенным свободным произведением

$$G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$$

построить свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,S})$$

групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{R,S}$. Нетрудно показать также (см. [23], § 5.4), что существует сюръективный гомоморфизм $\rho_{R,S}\colon G \to G_{R,S}$, действие которого на подгруппах A и B совпадает с действием естественных гомоморфизмов $A \to A/R$ и $B \to B/S$.

Предложение 10 ([8], следствие 1)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, A и B — некоторые группы из класса $\mathcal{K}$. Тогда следующие утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

1) *Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A и B.*
2) *Группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.*

Предложение 11 ([8], предложение 7)**.** *Пусть N — нормальная подгруппа группы G, $R = A \cap N$ и $S = B \cap N$. Тогда подгруппы R и S являются (H,K,φ)-совместимыми и существует гомоморфизм группы $G_{R,S}$ на группу G/N, действующий на подгруппах A/R и B/S инъективно.*

Обратно, если для (H,K,φ)-совместимых нормальных подгрупп R и S групп A и B соответственно существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на некоторую группу, действующий на подгруппах A/R и B/S инъективно, и $N = \ker(\rho_{R,S}\sigma)$, то $R = A \cap N$ и $S = B \cap N$.

Предложение 12. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H,K,φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно. Если выполняется хотя бы одно из условий:*

1) $\operatorname{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$,
2) $\operatorname{Aut}_G(H)$ — *абелева группа,*
3) $\operatorname{Aut}_G(H) = \operatorname{Aut}_A(H)$ *или* $\operatorname{Aut}_G(H) = \varphi \operatorname{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$,

то семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ совпадают с множествами $\mathcal{K}^*(G,A)$ и $\mathcal{K}^*(G,B)$ соответственно.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\lambda \in \Lambda$ и обозначим через R подгруппу R_λ, через S — подгруппу S_λ. Поскольку подгруппы R и S (H,K,φ)-совместимы, можно рассмотреть свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,S})$$

и гомоморфизм $\rho_{R,S}\colon G \to G_{R,S}$.

Нетрудно показать, что гомоморфизм $\rho_{R,S}$ индуцирует гомоморфизм группы $\operatorname{Aut}_G(H)$ на группу $W = \operatorname{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R)$, отображающий подгруппы $\operatorname{Aut}_A(H)$ и $\varphi \operatorname{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$ на подгруппы $U = \operatorname{Aut}_{A/R}(HR/R)$ и $V = \varphi_{R,S} \operatorname{Aut}_{B/S}(KS/S)\varphi_{R,S}^{-1}$ соответственно. Отсюда и из замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации следует, что имеет место одно из следующих утверждений:

α) $W \in \mathcal{K}$,
β) W — абелева группа,
γ) $W = U$ или $W = V$.

Покажем, что справедливы импликации $\beta \Rightarrow \alpha$ и $\gamma \Rightarrow \alpha$.

Так как $A/R \in \mathcal{K}$ и $B/S \in \mathcal{K}$, то согласно предложению 6 имеем $U = \operatorname{Aut}_{A/R}(HR/R) \in \mathcal{K}$ и $\operatorname{Aut}_{B/S}(KS/S) \in \mathcal{K}$. Поскольку $V \cong \operatorname{Aut}_{B/S}(KS/S)$, получаем $V \in \mathcal{K}$ и, следовательно, справедлива импликация $\gamma \Rightarrow \alpha$. Так как группа $G_{R,S}$ порождается подгруппами A/R и B/S, то, как легко видеть, группа W порождается подгруппами U и V. Поэтому, если W — абелева группа, то $W = UV$ и $W/V \cong U/U \cap V$. Так как $U, V \in \mathcal{K}$ и класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации, то $U/U \cap V \in \mathcal{K}$ и, следовательно, группа W является расширением $\mathcal{K}$-группы V при помощи $\mathcal{K}$-группы W/V. Поскольку $\mathcal{K}$ — корневой класс, такое расширение снова оказывается $\mathcal{K}$-группой и, стало быть, импликация $\beta \Rightarrow \alpha$ также справедлива.

Итак, в любом случае $\operatorname{Aut}_{G_{R,S}}(HR/R) \in \mathcal{K}$. Поэтому в силу предложения 10 существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппах A/R и B/S. Полагая $N = \ker(\rho_{R,S}\sigma)$, получаем $N \in \mathcal{K}^*(G)$ и согласно второй части предложения 11 имеем $R = A \cap N$, $S = B \cap N$. Таким образом, подгруппы R и S содержатся в семействах $\mathcal{K}^*(G,A)$ и $\mathcal{K}^*(G,B)$ соответственно. Ввиду произвольности выбора λ отсюда следует, что все подгруппы семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ принадлежат $\mathcal{K}^*(G,A)$ и все подгруппы семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ принадлежат $\mathcal{K}^*(G,B)$. Справедливость противоположных включений вытекает из первой части предложения 11 и предложения 4. $\square$

Объединяя предложения 8, 9 и 12, получаем следующее утверждение, представляющее собой расширенную версию теоремы 1.

Предложение 13. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, подгруппы H и K содержатся в группах A и B собственно. Пусть также $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H,K,φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно.*

1) *Если группа $\operatorname{Aut}_G(H)$ является абелевой или совпадает с одной из подгрупп $\operatorname{Aut}_A(H)$, $\varphi\operatorname{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями, подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.*

2) *Если $\operatorname{Aut}_G(H)\in\mathcal{K}$, семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями, подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A и подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

5. Некоторые свойства ограниченных разрешимых групп

Предложение 14 ([20], предложения 1–3)**.** *Пусть π — непустое множество простых чисел. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *произвольная π-ограниченная абелева группа имеет конечный ранг;*
2) *классы π-ограниченных абелевых, π-ограниченных нильпотентных и π-ограниченных разрешимых групп замкнуты относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов;*
3) *если π-ограниченная разрешимая группа абелева, то она является π-ограниченной абелевой.*

Напомним, что подгруппа Y группы X называется *π'-изолированной* в этой группе для некоторого множества простых чисел π, если для каждого элемента $x\in X$ и для каждого простого числа $q\notin\pi$ из включения $x^q\in Y$ следует $x\in Y$. Приводимое далее предложение 15 дает весьма общее необходимое условие отделимости подгрупп. Как показывает предложение 16, для отделимости корневым классом подгрупп ограниченных нильпотентных групп это условие оказывается и достаточным.

Предложение 15 ([9], предложение 5)**.** *Пусть $\mathcal{L}$ — произвольный класс групп, состоящий только из периодических групп, X — некоторая группа, Y — ее подгруппа. Если подгруппа Y $\mathcal{L}$-отделима в группе X, то она $\pi(\mathcal{L})'$-изолирована в этой группе.*

Предложение 16 ([9], предложение 8)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс, состоящий только из периодических групп. Тогда произвольная $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа $\pi(\mathcal{K})$-ограниченной нильпотентной группы $\mathcal{K}$-отделима.*

Предложение 17. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс, состоящий только из периодических групп. Тогда произвольная группа из класса $\mathcal{K}$ имеет конечный период.*

Доказательство. Действительно, пусть X — произвольная группа из класса $\mathcal{K}$. Тогда согласно предложению 1 декартово произведение $P=\prod\limits_{x\in X}X_x$, где X_x — изоморфная копия группы X для каждого элемента $x\in X$, также принадлежит классу $\mathcal{K}$ и, следовательно, является периодической группой. Это означает, что элемент группы P, функция $f\colon X\to X$, определенная по правилу $f(x) = x$, имеет некоторый конечный порядок q. Очевидно, что в силу задания функции f период группы X совпадает с q и, в частности, конечен. $\square$

Предложение 18. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс, состоящий только из периодических групп и замкнутый относительно факторизации. Тогда произвольная $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная разрешимая группа, принадлежащая классу $\mathcal{K}$, конечна.*

Доказательство. Пусть X — $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная разрешимая группа, принадлежащая классу $\mathcal{K}$, Z — некоторый фактор разрешимого ряда группы X. Так как класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп и фактор-групп, то $Z \in \mathcal{K}$. Отсюда и из предложения 17 вытекает, что группа Z имеет конечное число примарных компонент и все они соответствуют числам из множества $\pi(\mathcal{K})$. Из предложения 14 следует, что Z — $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная абелева группа и потому все ее примарные компоненты конечны. Значит, конечными являются как группа Z, так и вся группа X. $\square$

Предложение 19. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс, состоящий только из периодических групп и замкнутый относительно факторизации, X — $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная разрешимая группа, Y — подгруппа группы X. Тогда произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(Y)$ содержит подгруппу семейства $\mathcal{K}^*(Y)$, характеристическую в Y.*

Доказательство. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(Y)$. В силу предложения 14 фактор-группа Y/M является $\pi(\mathcal{K})$-ограниченной разрешимой $\mathcal{K}$-группой. Поэтому согласно предложению 18 она имеет конечный порядок q. Положим $N = \mathrm{sgp}\{y^q \mid y \in Y\}$. Тогда N — характеристическая подгруппа группы Y, лежащая в M. Остается показать, что $Y/N \in \mathcal{K}$.

Пусть Z — произвольный фактор некоторого разрешимого ряда группы Y/N. Все простые делители порядков элементов группы Z являются также и делителями числа q. Так как q — порядок $\mathcal{K}$-группы Y/M, отсюда получаем Z — $\pi(\mathcal{K})$-группа. В силу предложения 14 Z — $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная абелева группа. Значит, все ее примарные компоненты конечны и, поскольку их число ограничено количеством простых делителей q, группа Z также конечна. Отсюда следует, что фактор-группа Y/N обладает полициклическим рядом, порядки факторов которого принадлежат множеству $\pi(\mathcal{K})$. Из определения последнего и замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп и расширений вытекает, что все эти факторы, а вместе с ними и группа Y/N, принадлежат $\mathcal{K}$. $\square$

Предложение 20. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс, состоящий только из периодических групп и замкнутый относительно факторизации, X — $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная нильпотентная группа, Y — нормальная $\mathcal{K}$-отделимая подгруппа группы X. Тогда группа X $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе Y.*

Доказательство. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(Y)$, нормальная в X. Так как $Y/M \in \mathcal{K}$, то по предложению 3 подгруппа M $\mathcal{K}$-отделима в группе Y. Согласно предложению 15 подгруппа Y $\pi(\mathcal{K})'$-изолирована в X, а подгруппа M — в Y. Отсюда легко следует, что M является $\pi(\mathcal{K})'$-изолированной, а в силу предложения 16 и $\mathcal{K}$-отделимой подгруппой группы X. Значит, по предложению 3 фактор-группа X/M $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Ввиду предложений 14 и 18 ее подгруппа Y/M является $\pi(\mathcal{K})$-ограниченной нильпотентной и, следовательно, конечной группой. Поэтому согласно предложению 2 найдется подгруппа $N/M \in \mathcal{K}^*(X/M)$ такая, что $N/M \cap Y/M = 1$. Легко видеть, что тогда $N \in \mathcal{K}^*(X)$, $N \cap Y = M$. Таким образом, группа X $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе Y. $\square$

Предложение 21. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутый относительно факторизации корневой класс групп, содержащий хотя бы одну непериодическую группу. Тогда любая $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная разрешимая группа принадлежит классу $\mathcal{K}$. В частности, каждая подгруппа такой группы $\mathcal{K}$-отделима.*

Доказательство. Пусть X — непериодическая группа, принадлежащая классу $\mathcal{K}$, и x — элемент бесконечного порядка этой группы. Тогда ввиду замкнутости $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп и фактор-групп бесконечная циклическая подгруппа, порожденная элементом x, и все ее фактор-группы содержатся в данном классе. Отсюда следует, что множество $\pi(\mathcal{K})$ включает все простые числа. Кроме того, в силу предложения 1 классу $\mathcal{K}$ принадлежит декартово произведение счетного числа бесконечных циклических групп, а значит, и подгруппа этого произведения — свободная абелева группа A счетного ранга.

Пусть теперь Y — произвольная $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная абелева группа. Согласно предложению 14 группа Y имеет конечный ранг и, стало быть, является расширением свободной абелевой группы конечного ранга при помощи периодической $\pi(\mathcal{K})$-ограниченной абелевой группы Z. Так как $\pi(\mathcal{K})$ совпадает с множеством всех простых чисел, то все примарные компоненты группы Z конечны и потому сама группа Z не более, чем счетна. Отсюда следует, что группа Y также является не более, чем счетной и, значит, представляет собой фактор-группу $\mathcal{K}$-группы A. Ввиду замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации отсюда следует $Y \in \mathcal{K}$.

Согласно предложению 14 факторы произвольного разрешимого ряда $\pi(\mathcal{K})$-ограниченной разрешимой группы являются $\pi(\mathcal{K})$-ограниченными абелевыми группами и в силу доказанного выше содержатся в $\mathcal{K}$. Будучи корневым, класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия расширений. Следовательно, произвольная $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная разрешимая группа принадлежит $\mathcal{K}$. □

6. Доказательства следствий

Предложение 22. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, группы A и B/K $\mathcal{L}$-аппроксимируемы, группа B $\mathcal{L}$-регулярна по подгруппе K. Пусть также $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{L}^*(A)$ и $\mathcal{L}^*(B)$ соответственно. Если H, K — циклические подгруппы или $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$, то семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями.*

Доказательство. Предположим, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ не является фильтрацией и пересечению всех его подгрупп принадлежит некоторый неединичный элемент $g \in A$. Из $\mathcal{L}$-аппроксимируемости группы A следует, что существует подгруппа $R \in \mathcal{L}^*(A)$, не содержащая элемента g. Обозначим $H \cap R$ через U, $U\varphi$ — через V. Тогда по предложению 4 имеем $U \in \mathcal{L}^*(H)$, $V \in \mathcal{L}^*(K)$.

Так как подгруппы H, R нормальны в группе A, то и подгруппа U нормальна в A. Поэтому $U\alpha = U$ для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}_A(H)$. Если $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$, то для каждого $\beta \in \mathrm{Aut}_B(K)$ справедливо равенство $U\varphi\beta\varphi^{-1} = U$ и потому $V\beta = V$. Следовательно, подгруппа V нормальна в B. Если же K — циклическая подгруппа группы B, то любая ее подгруппа нормальна в B.

Таким образом, V — подгруппа семейства $\mathcal{L}^*(K)$, нормальная в B. Ввиду $\mathcal{L}$-регулярности группы B по подгруппе K найдется подгруппа $S \in \mathcal{L}^*(B)$, удовлетворяющая соотношению $K \cap S = V$. Подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы, следовательно, $R \in \{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Однако, элемент g не принадлежит подгруппе R, что противоречит его выбору.

Убедимся, что семейство $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ также является фильтрацией. Рассуждая от противного, зафиксируем произвольный неединичный элемент g, принадлежащий пересечению всех подгрупп семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Предположим сначала, что $g \in K$. Тогда $g = h\varphi$ для некоторого неединичного элемента $h \in H$. Как и выше, найдем пару подгрупп (R, S) семейства $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ такую, что $h \notin R$. Тогда $g \notin S$, что противоречит выбору элемента g.

Пусть теперь $g \notin K$. Тогда gK — отличный от единицы элемент $\mathcal{L}$-аппроксимируемой группы B/K. Следовательно, существует подгруппа $N/K \in \mathcal{L}^*(B/K)$, не содержащая элемента gK. Легко видеть, что тогда $N \in \mathcal{L}^*(B)$ и $g \notin N$. Так как $K \leqslant N$, то $K \cap N = K$, а потому подгруппы A и N (H, K, φ)-совместимы. Кроме того, эти подгруппы принадлежат семействам $\mathcal{L}^*(A)$, $\mathcal{L}^*(B)$ соответственно. Таким образом, $g \notin N$, $N \in \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, что вновь противоречит выбору элемента g. □

Доказательство следствия 1. *Необходимость* условия сразу же вытекает из теоремы 1, проверим его *достаточность*. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно. Так как $K \in \mathcal{K}^*(B)$, то в силу предложения 5 группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе K. Группа A $\mathcal{K}$-аппроксимируема по условию, B/K принадлежит $\mathcal{K}$ и потому также $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Следовательно, по предложению 22 семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями. Ввиду предложения 3 подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B. Поэтому группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема согласно теореме 1. □

Доказательство следствия 2. Как и выше, *необходимость* условий вытекает из теоремы 1. Проверим *достаточность*. Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$, $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно.

Предположим сначала, что класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп. Тогда в силу предложения 20 группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе K. Из $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы K в группе B и замкнутости класса $\mathcal{K}$ относительно факторизации ввиду предложения 3 следует $\mathcal{K}$-аппроксимируемость фактор-группы B/K. Поэтому согласно предложению 22 семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями и в силу теоремы 1 группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.

Пусть теперь класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу. Тогда согласно предложению 21 $B \in \mathcal{K}$ и ввиду замкнутости $\mathcal{K}$ относительно факторизации $B/K \in \mathcal{K}$. Поэтому оказываются выполненными условия следствия 1, из которого и вытекает $\mathcal{K}$-аппроксимируемость группы G. □

7. Доказательства теорем 2 и 3

Предложение 23. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Если $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{K}$, то каждая подгруппа $M \in \mathcal{K}^*(H)$ содержит подгруппу $N \in \mathcal{K}^*(H)$, нормальную в группе G.*

Доказательство. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(H)$. Положим

$$N = \bigcap_{\gamma\in\mathrm{Aut}_G(H)} M\gamma.$$

Легко видеть, что тогда N — нормальная подгруппа группы G.

Так как для каждого $\gamma \in \mathrm{Aut}_G(H)$ подгруппа $M\gamma$ нормальна в группе H, то по теореме Ремака фактор-группа H/N изоморфна подгруппе декартова произведения

$$\prod_{\gamma\in\mathrm{Aut}_G(H)} H/M\gamma.$$

Кроме того, для всякого $\gamma \in \mathrm{Aut}_G(H)$ справедливы соотношения $H/M\gamma = H\gamma/M\gamma \cong H/M \in \mathcal{K}$. Поэтому $H/N \in \mathcal{K}$ в силу предложения 1. □

Предложение 24. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, $H \in \mathcal{K}^*(A)$, $K \in \mathcal{K}^*(B)$. Если группа $\operatorname{Aut}_G(H)$ является абелевой или совпадает с одной из подгрупп $\operatorname{Aut}_A(H)$, $\varphi \operatorname{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$, то каждая подгруппа $M \in \mathcal{K}^*(H)$ содержит подгруппу $N \in \mathcal{K}^*(H)$, нормальную в группе G.*

Доказательство. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(H)$. Определим подгруппу N так же, как и при доказательстве предложения 23.

Пусть $\{a_i \mid i \in \mathcal{I}\}$, $\{b_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ — некоторые системы представителей смежных классов группы A по подгруппе H и группы B по подгруппе K. Положим $\alpha_i = \widehat{a_i}|_H \in \operatorname{Aut}_A(H)$, $\beta_j = \varphi\big(\widehat{b_j}|_K\big)\varphi^{-1} \in \varphi \operatorname{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$ $(i \in \mathcal{I},\ j \in \mathcal{J})$.

Поскольку группа G порождается своими подгруппами A и B, группа $\operatorname{Aut}_G(H)$ порождается подгруппами $\operatorname{Aut}_A(H)$ и $\varphi \operatorname{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$. Отсюда и из условий, наложенных на группу $\operatorname{Aut}_G(H)$, следует, что каждый автоморфизм $\gamma \in \operatorname{Aut}_G(H)$ может быть записан в виде $\gamma = \alpha\beta$, где $\alpha \in \operatorname{Aut}_A(H)$, $\beta \in \varphi \operatorname{Aut}_B(K)\varphi^{-1}$. Пусть элементы $a \in A$, $b \in B$ таковы, что $\alpha = \widehat{a}|_H$, $\beta = \varphi\big(\widehat{b}|_K\big)\varphi^{-1}$. Записывая их в виде $a = ha_i$, $b = kb_j$ для некоторых $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{J}$, $h \in H$, $k \in K$ и учитывая, что подгруппы M и $M\alpha_i$ нормальны в H, а подгруппа $M\alpha_i\varphi$ — в K, получаем $M\gamma = M\alpha_i\beta_j$.

Таким образом, $N = \bigcap\limits_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{J}} M\alpha_i\beta_j$ и, следовательно, фактор-группа H/N изоморфна подгруппе декартова произведения $\prod\limits_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{J}} H/M\alpha_i\beta_j$. Отметим, что множество $\mathcal{I}\times\mathcal{J}$ равномощно $\mathcal{K}$-группе $A/H \times B/K$ и каждая фактор-группа $H/M\alpha_i\beta_j$ $(i \in \mathcal{I},\ j \in \mathcal{J})$ изоморфна $\mathcal{K}$-группе H/M. Поэтому указанное декартово произведение, а вместе с ним и группа H/N принадлежат классу $\mathcal{K}$ в силу предложения 1. $\square$

Предложение 25. *Пусть $\mathcal{L}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, группы A и B $\mathcal{L}$-аппроксимируемы и $\mathcal{L}$-регулярны по подгруппам H и K соответственно. Пусть также $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{L}^*(A)$ и $\mathcal{L}^*(B)$ соответственно. Если каждая подгруппа $M \in \mathcal{L}^*(H)$ содержит подгруппу $N \in \mathcal{L}^*(H)$, нормальную в группе G, то семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями.*

Доказательство. Пусть $a \in A\setminus\{1\}$ — произвольный элемент. Так как группа A $\mathcal{L}$-аппроксимируема, то найдется подгруппа $U \in \mathcal{L}^*(A)$, не содержащая элемента a. Положим $M = U \cap H$. Согласно предложению 4 подгруппа M принадлежит семейству $\mathcal{L}^*(H)$ и, следовательно, содержит подгруппу $N \in \mathcal{L}^*(H)$, нормальную в группе G. Очевидно, что тогда подгруппа $N\varphi$ принадлежит семейству $\mathcal{L}^*(K)$ и также нормальна в группе G.

Воспользуемся $\mathcal{L}$-регулярностью групп A и B по подгруппам H и K соответственно и найдем подгруппы $V \in \mathcal{L}^*(A)$ и $S \in \mathcal{L}^*(B)$ такие, что $V \cap H = N$ и $S \cap K = N\varphi$. По предложению 2 подгруппа $R = U \cap V$ принадлежит семейству $\mathcal{L}^*(A)$ и при этом не содержит элемента a. Так как $N \leqslant M = U \cap H$, то $R \cap H = U \cap (V \cap H) = U \cap N = N$. Следовательно, подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы и потому найдется такое $\lambda \in \Lambda$, что $R = R_\lambda$ и $S = S_\lambda$. Ввиду произвольности выбора элемента a это означает, что семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией. Рассуждения для семейства $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ аналогичны. $\square$

Доказательство теоремы 2. Заметим прежде всего, что группы A и B представляют собой расширения $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп H и K при помощи $\mathcal{K}$-групп A/H и B/K соответственно. В силу предложения 7 отсюда следует, что A и B сами являются $\mathcal{K}$-аппроксимируемыми группами. Заметим еще, что ввиду включений $A/H \in \mathcal{K}$, $B/K \in \mathcal{K}$

и предложения 3 подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A и подгруппа K $\mathcal{K}$-отделима в группе B.

Пусть $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп, принадлежащих семействам $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно. В силу предложений 5, 23 и 24 группы A и B $\mathcal{K}$-регулярны по подгруппам H и K соответственно и каждая подгруппа $M \in \mathcal{L}^*(H)$ содержит подгруппу $N \in \mathcal{L}^*(H)$, нормальную в группе G. Следовательно, по предложению 25 семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями и утверждение теоремы вытекает из предложения 13. $\square$

Доказательство теоремы 3. *Необходимость.* Предположим, что подгруппа H не является $\mathcal{K}$-отделимой в группе A. Тогда существует элемент $a \in A \setminus H$ такой, что для любой подгруппы $N \in \mathcal{K}^*(A)$ справедливо включение $a \in HN$. Поскольку K — собственная подгруппа группы B, найдется также элемент $b \in B \setminus K$. Рассмотрим последовательность элементов $g_1 = [a, b]$, $g_{i+1} = [a, g_i]$, $i \geqslant 1$.

Используя индукцию, нетрудно показать, что для каждого $i \geqslant 1$ элемент g_i имеет несократимую запись длины 2^{i+1} и потому отличен от 1. Вместе с тем, если M — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(G)$ и $N = M \cap A$, то по предложению 4 имеем $N \in \mathcal{K}^*(A)$. Поэтому $a \equiv h = h\varphi \pmod N$ для некоторого элемента $h \in H$, $a \equiv h\varphi \pmod M$ и $g_i \in (\gamma_{i+1}B)M$, где $\gamma_{i+1}B$ — $(i+1)$-й член нижнего центрального ряда группы B. В частности, $g_i \in M$ для всех $i \geqslant c$, где c — ступень нильпотентности группы B.

Таким образом, неединичный элемент g_c лежит в каждой подгруппе семейства $\mathcal{K}^*(G)$, что противоречит $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G. $\mathcal{K}$-отделимость подгруппы K проверяется аналогично.

Достаточность. Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то согласно предложению 21 имеем $A, B \in \mathcal{K}$. Ввиду замкнутости $\mathcal{K}$ относительно взятия подгрупп и фактор-групп отсюда следует, что H, K, A/H, $B/K \in \mathcal{K}$, и потому требуемое утверждение вытекает из теоремы 2. Если класс $\mathcal{K}$ состоит из периодических групп, то в силу предложений 19, 20 группы A и B $\mathcal{K}$-регулярны по подгруппам H и K соответственно и каждая подгруппа $M \in \mathcal{K}^*(H)$ содержит подгруппу $N \in \mathcal{K}^*(H)$, нормальную в группе G. Поэтому, как и при доказательстве теоремы 2, можно воспользоваться предложениями 25 и 13. $\square$

Литература

[1] Мальцев А.И. *О гомоморфизмах на конечные группы*, Учен. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та **18**, 49–60 (1958).

[2] Gruenberg K.W. *Residual properties of infinite soluble groups*, Proc. Lond. Math. Soc. **7**, 29–62 (1957).

[3] Азаров Д.Н., Тьеджо Д. *Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп*, Науч. тр. Ивановск. гос. ун-та. Матем., Вып. 5, 6–10 (2002).

[4] Tieudjo D. *On root-class residuality of some free constructions*, J. Algebra, Number Theory Appl. **18** (2), 125–143 (2010).

[5] Sokolov E.V. *A characterization of root classes of groups*, Comm. Algebra **43** (2), 856–860 (2015).

[6] Соколов Е.В. *Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп*, Матем. заметки **97** (5), 767–780 (2015).

[7] Гольцов Д.В. *Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп*, Матем. заметки **97** (5), 665–669 (2015).

[8] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением*, Изв. вузов. Матем., № 10, 27–44 (2015).

[9] Соколов Е.В., Туманова Е.А. *Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп*, Сиб. матем. журн. **57** (1), 171–185 (2016).

[10] Соколов Е.В. *Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп*, Сиб. матем. журн. **58** (1), 219–229 (2017).

[11] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага–Солитэра*, Сиб. матем. журн. **58** (3), 700–709 (2017).
[12] Соколов Е.В., Туманова Е.А. *Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами*, Матем. заметки **102** (4), 597–612 (2017).
[13] Туманова Е.А. *Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами*, Сиб. матем. журн. **60** (4), 891-906 (2019).
[14] Азаров Д.Н. *Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой*, Сиб. матем. журн. **56** (2), 249–264 (2015).
[15] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. *Комбинаторная теория групп* (Наука, М., 1974).
[16] Higman G. *Amalgams of p-groups*, J. Algebra **1** (3), 301–305 (1964).
[17] Baumslag G. *On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (2), 193–209 (1963).
[18] Логинова Е.Д. *Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами*, Сиб. матем. журн. **40** (2), 395–407 (1999).
[19] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп*, Матем. заметки **95** (4), 605–614 (2014).
[20] Соколов Е.В. *Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп*, Сиб. матем. журн. **55** (6), 1381–1390 (2014).
[21] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. *Основы теории групп*, 3-е изд. (Наука, М., 1982).
[22] Куваев А.Е., Соколов Е.В. *Необходимые условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп*, Изв. вузов. Матем., № 9, 36–47 (2017).
[23] Молдаванский Д.И. *Введение в комбинаторную теорию групп* (Ивановск. гос. ун-т, Иваново, 2018).

Евгений Викторович Соколов

Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, д. 39, г. Иваново, 153025, Россия,
`e-mail:` ev-sokolov@yandex.ru

Елена Александровна Туманова

Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, д. 39, г. Иваново, 153025, Россия,
`e-mail:` helenfog@bk.ru

E.V. Sokolov and E.A. Tumanova

On the root-class residuality of certain free products of groups with normal amalgamated subgroups

Abstract. Let $\mathcal{K}$ be a root class of groups closed under taking quotient groups, G be a free product of groups A and B with amalgamated subgroups H and K. Let also H be normal in A, K be normal in B, and $\mathrm{Aut}_G(H)$ denote the set of automorphisms of H induced by all inner automorphisms of G. We prove a criterion for G to be residually a $\mathcal{K}$-group provided $\mathrm{Aut}_G(H)$ is an abelian group or it satisfies some other conditions. We apply this result in the cases when A and B are bounded nilpotent groups or $A/H, B/K \in \mathcal{K}$.

Keywords: generalized free product, residual finiteness, residual p-finiteness, residual solvability, root-class residuality.

Evgeny Victorovich Sokolov

Ivanovo State University,
39 Ermak str., Ivanovo, 153025 Russia,
`e-mail:` ev-sokolov@yandex.ru

Elena Alexandrovna Tumanova

Ivanovo State University,
39 Ermak str., Ivanovo, 153025 Russia,
`e-mail:` helenfog@bk.ru