Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2023. Том 64, № 2

УДК 512.543

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ГРУПП НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И HNN–РАСШИРЕНИЙ

Е. В. Соколов, Е. А. Туманова

Аннотация. Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп. Доказаны необходимые и достаточные условия аппроксимируемости классом $\mathscr{C}$ свободного произведения двух групп с объединенными подгруппами, одна из которых лежит в центре соответствующего свободного множителя. Эти результаты применяются для получения критериев и достаточных условий $\mathscr{C}$-аппроксимируемости некоторых HNN-расширений и древесных произведений.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.212

Ключевые слова: аппроксимируемость корневым классом групп, финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость разрешимыми группами, обобщенное свободное произведение, HNN-расширение, древесное произведение

§ 1. Введение

Статья продолжает цикл работ, посвященных изучению аппроксимируемости корневыми классами групп различных свободных конструкций: обобщенных свободных произведений [1–4], HNN-расширений [5–11], древесных произведений [12–14], фундаментальных групп графов групп [14–16]. Напомним [17, 18], что класс групп $\mathscr{C}$ называется *корневым*, если он содержит неединичные группы, замкнут относительно взятия подгрупп и удовлетворяет любому из следующих двух равносильных условий:

1) для каждой группы X и для каждого субнормального ряда $1 \leq Z \leq Y \leq X$, факторы X/Y и Y/Z которого принадлежат классу $\mathscr{C}$, найдется нормальная подгруппа T группы X такая, что $T \leq Z$ и $X/T \in \mathscr{C}$ (*условие Грюнберга*);

2) класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия расширений и декартовых произведений вида $\prod\limits_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathscr{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$.

Легко видеть, что к числу корневых относятся классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), периодических $\mathfrak{P}$-групп конечного периода (где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп и всех групп без кручения. Нетрудно показать также, что пересечение любого числа корневых классов снова корневой класс.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00166, `https://rscf.ru/project/22-21-00166/`.

Напомним далее, что группа X называется *аппроксимируемой классом групп* $\mathscr{C}$ (или, короче, $\mathscr{C}$*-аппроксимируемой*), если для каждого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathscr{C}$ ($\mathscr{C}$*-группу*), переводящий x в неединичный элемент [19]. Исследования аппроксимируемости свободных конструкций групп не каким-то конкретным, а произвольным корневым классом групп оказались весьма продуктивными. Иногда такой подход позволяет продвинуться даже дальше, чем при изучении аппроксимируемости некоторым фиксированным корневым классом, за счет большей универсальности и меньшей технической сложности приемов, используемых при доказательствах. Это верно, например, в случае, когда в роли указанного фиксированного класса выступает класс всех разрешимых групп или один из его подклассов (см. [11, 13]).

Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений, предполагающихся неизменными до конца статьи. Пусть Γ — непустой неориентированный связный граф с множеством вершин $\mathscr{V}$ и множеством ребер $\mathscr{E}$ (допускаются петли и кратные ребра). Выбирая произвольным образом направления для всех ребер графа Γ, обозначая вершины, являющиеся концами ребра $e \in \mathscr{E}$, через $e(1)$, $e(-1)$ и сопоставляя каждой вершине $v \in \mathscr{V}$ некоторую группу G_v, а каждому ребру $e \in \mathscr{E}$ — группу H_e и инъективные гомоморфизмы

$$\varphi_{+e}\colon H_e \to G_{e(1)}, \quad \varphi_{-e}\colon H_e \to G_{e(-1)},$$

получим ориентированный *граф групп*

$$\mathscr{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathscr{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathscr{E})).$$

Будем называть группы G_v $(v \in \mathscr{V})$ и H_e $(e \in \mathscr{E})$ *вершинными* и *реберными группами* соответственно, подгруппы $H_e\varphi_{+e}$ и $H_e\varphi_{-e}$ — *реберными подгруппами*. Последние для краткости будем обозначать через H_{+e} и H_{-e}. Для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ положим также

$$H_v = \operatorname{sgp}\{H_{\varepsilon e} \mid e \in \mathscr{E},\ \varepsilon = \pm 1,\ v = e(\varepsilon)\}.$$

Пусть $\mathscr{T}$ — некоторое максимальное поддерево в графе Γ и $\mathscr{E}_{\mathscr{T}}$ — множество ребер графа Γ, входящих в дерево $\mathscr{T}$. Тогда *фундаментальной группой графа групп* $\mathscr{G}(\Gamma)$ называется группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, образующими которой являются образующие групп G_v $(v \in \mathscr{V})$ и символы t_e $(e \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_{\mathscr{T}})$, а определяющими соотношениями — соотношения групп G_v $(v \in \mathscr{V})$ и всевозможные соотношения вида

$$\begin{aligned} h_e\varphi_{+e} &= h_e\varphi_{-e} \quad (e \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}},\ h_e \in H_e),\\ t_e^{-1}(h_e\varphi_{+e})t_e &= h_e\varphi_{-e} \quad (e \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_{\mathscr{T}},\ h_e \in H_e), \end{aligned}$$

где $h_e\varphi_{\varepsilon e}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ — слово в образующих группы $G_{e(\varepsilon)}$, задающее образ элемента h_e относительно гомоморфизма $\varphi_{\varepsilon e}$. Известно [20, § 5.1], что все группы описанного вида, соответствующие различным максимальным поддеревьям в графе Γ, изоморфны, и потому о фундаментальной группе графа групп можно говорить, не указывая, какое именно максимальное поддерево было выбрано для задания ее представления.

Напомним, что если граф Γ содержит две вершины и соединяющее их ребро e, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ называется *свободным произведением групп* $G_{e(1)}$ *и* $G_{e(-1)}$ *с подгруппами* H_{+e} *и* H_{-e}*, объединенными относительно изоморфизма* $\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}$, или просто *обобщенным свободным произведением групп* $G_{e(1)}$

и $G_{e(-1)}$ (используемая здесь и далее терминология, касающаяся обобщенных свободных произведений и HNN-расширений, согласована с монографией [21]). Если единственное ребро e графа Γ является петлей, то группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ называют HNN-*расширением группы* $G_{e(1)} = G_{e(-1)}$ *с подгруппами* H_{+e} *и* H_{-e}, *связанными при помощи изоморфизма* $\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}$. Наконец, если граф Γ представляет собой дерево, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ называется *древесным произведением групп* G_v $(v \in \mathscr{V})$ [22]. В первых двух случаях для простоты будем использовать вместо символов $G_{e(1)}$, $G_{e(-1)}$, H_{+e}, H_{-e} и t_e (если e — петля) буквы A, B (или только B, если $G_{e(1)} = G_{e(-1)}$), H, K и t соответственно и обозначать изоморфизм $\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}$ через φ. При этом представление группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ может быть схематично записано в виде

$$\langle A * B;\ H = K,\ \varphi\rangle \quad \text{или} \quad \langle B, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi\rangle.$$

Значительная часть результатов об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп различных графов групп получена с помощью так называемого фильтрационного метода, впервые предложенного в [23] для изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений двух групп. В [24] этот метод распространен на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп и фундаментальной группы произвольного графа групп. Будем называть *результатом первого уровня* достаточное условие существования гомоморфизма группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ на группу из аппроксимирующего класса $\mathscr{C}$, действующего инъективно на всех вершинных группах (которые при этом, очевидно, должны быть $\mathscr{C}$-группами). Суть упомянутого обобщения фильтрационного метода состоит в том, чтобы в случае, когда группы G_v $(v \in \mathscr{V})$ уже не обязательно принадлежат классу $\mathscr{C}$, аппроксимировать группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ не непосредственно $\mathscr{C}$-группами, а фундаментальными группами графов групп, для которых ранее были получены результаты первого уровня. Более формально эта схема описана в § 3, а примером ее использования служат в том числе доказательства приводимых ниже теорем 4 и 5.

Отметим, что согласно предложению 4 из § 3 для любого корневого класса групп $\mathscr{C}$ из существования гомоморфизма группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ на $\mathscr{C}$-группу, инъективного на группах G_v $(v \in \mathscr{V})$, следует $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$. Иногда верно и обратное, однако в целом это не так; подробнее данный вопрос обсуждается в [15]. В случае *произвольного* корневого аппроксимирующего класса групп результаты первого уровня получены для

— свободного произведения двух групп с нормальными объединенными подгруппами [2],

— HNN-расширения с совпадающими связанными подгруппами, нормальными в базовой группе [6],

— HNN-расширения с тривиально пересекающимися связанными подгруппами, удовлетворяющими ряду дополнительных условий [10],

— фундаментальных групп некоторых графов групп (включая древесные произведения) с центральными реберными подгруппами [9, 13, 14].

Данная статья посвящена главным образом доказательству аналогичных утверждений для обобщенных свободных произведений двух групп и HNN-расширений, в которых только одна из реберных подгрупп лежит в центре содержащей ее вершинной группы. Отметим, что для указанных конструкций не изучалась не только аппроксимируемость произвольными корневыми классами, но, по-видимому, и аппроксимируемость какими-либо конкретными классами групп.

§ 2. Формулировка результатов

Следующая теорема служит основой для всех остальных утверждений, доказанных в настоящей статье.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный корневой класс групп,*

$$P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi\rangle,$$

подгруппа H лежит в центре группы A, $A/H \in \mathscr{C}$ и существует гомоморфизм σ группы B на $\mathscr{C}$-группу, инъективный на подгруппе K. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Гомоморфизм σ может быть продолжен до гомоморфизма группы P на $\mathscr{C}$-группу, инъективного на подгруппе A.*

2. *Если группа B $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то и группа P $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Из приведенной теоремы следует, в частности, что свободное произведение двух разрешимых групп с объединенными подгруппами, одна из которых лежит в центре содержащего ее свободного множителя, аппроксимируется разрешимыми группами. Это утверждение обобщает теорему 4 из [25] и теорему 5 из [26], в которых речь идет об обобщенном свободном произведении абелевой и разрешимой групп. Из теоремы 1 легко получается также

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный корневой класс групп, Γ — конечное дерево,*

$$\mathscr{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathscr{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathscr{E}))$$

и для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ группа G_v обладает гомоморфизмом σ_v на $\mathscr{C}$-группу, инъективным на подгруппе H_v. Пусть также для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}\sigma_{e(\varepsilon)}$ лежит в центре группы $G_{e(\varepsilon)}\sigma_{e(\varepsilon)}$ и $G_{e(\varepsilon)}\sigma_{e(\varepsilon)}/H_{\varepsilon e}\sigma_{e(\varepsilon)} \in \mathscr{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, продолжающий гомоморфизмы σ_v $(v \in \mathscr{V})$.*

2. *Если все группы G_v $(v \in \mathscr{V})$ $\mathscr{C}$-аппроксимируемы, то и группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Сформулированная теорема служит частичным обобщением теоремы 2 из [14], в которой речь также идет о древесных произведениях с центральными реберными подгруппами. Основным отличием приведенного утверждения является отсутствие требования к аппроксимирующему классу $\mathscr{C}$ быть замкнутым относительно взятия фактор-групп; вместо него применяется более слабое условие: $G_{e(\varepsilon)}\sigma_{e(\varepsilon)}/H_{\varepsilon e}\sigma_{e(\varepsilon)} \in \mathscr{C}$ для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. В то же время в сформулированной теореме дерево Γ должно быть конечным, а в теореме 2 из [14] используется лишь принадлежность классу $\mathscr{C}$ прямого произведения групп $G_v\sigma_v$ $(v \in \mathscr{V})$.

Еще одним примером применения теоремы 1 является

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп,*

$$E = \left\langle B, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi\right\rangle$$

и существует гомоморфизм σ группы B на $\mathscr{C}$-группу, инъективный на подгруппе $\mathrm{sgp}\{H, K\}$. Пусть также N — нормальное замыкание подгруппы $K\sigma$ в группе $B\sigma$ и $\overline{\varphi}\colon H\sigma \to K\sigma$ — изоморфизм, индуцированный изоморфизмом φ. Если подгруппа $H\sigma$ лежит в центре группы $B\sigma$, подгруппа $N \cap H\sigma$ $\overline{\varphi}$-инвариантна и циклическая группа Φ, порожденная ограничением изоморфизма $\overline{\varphi}$

на подгруппу $N \cap H\sigma$, принадлежит классу $\mathscr{C}$, то справедливы следующие утверждения.

1. *Гомоморфизм σ может быть продолжен до гомоморфизма группы E на $\mathscr{C}$-группу.*

2. *Если группа B $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то и группа E $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

В связи с формулировкой теоремы 3 (а также приводимой далее теоремы 5) отметим, что если класс $\mathscr{C}$ содержит непериодические группы, то ввиду своей замкнутости относительно взятия подгрупп и фактор-групп он включает и все циклические группы. Поэтому условие $\Phi \in \mathscr{C}$ выполняется автоматически. Если класс $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп и группа Φ конечна, то нетрудно показать, используя, например, теорему 1 из [6], что принадлежность этой группы классу $\mathscr{C}$ оказывается необходимым условием $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы E. Таким образом, неисследованным остается лишь случай, когда класс $\mathscr{C}$ содержит только периодические группы, а группа Φ бесконечна.

Теоремы 1 и 3 в сочетании с утверждениями общего характера из [24] позволяют получить новые *результаты второго уровня*, т. е. достаточные условия аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, в которых не предполагается, что вершинные или реберные группы принадлежат аппроксимирующему классу. Теорему 2 тоже можно было бы использовать подобным образом, но на этом пути пока не удается доказать что-либо, отличное от утверждений из [14]. Прежде, чем формулировать полученные результаты, приведем несколько определений.

Если $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп и X — некоторая группа, то через $\mathscr{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{C}$. Напомним [27], что подгруппа Y группы X называется *$\mathscr{C}$-отделимой* в этой группе, если

$$\bigcap_{Z \in \mathscr{C}^*(X)} YZ = Y.$$

Будем говорить также, что группа X *$\mathscr{C}$-квазирегулярна* по подгруппе Y, если для каждой подгруппы $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$, удовлетворяющая условию $N \cap Y \leq M$. Отметим, что если $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, подгруппа Y $\mathscr{C}$-отделима в группе X и все подгруппы из семейства $\mathscr{C}^*(Y)$ имеют конечные индексы в группе Y (последнее верно, в частности, если класс $\mathscr{C}$ состоит из конечных групп), то $\mathscr{C}$-квазирегулярность X по Y равносильна $\mathscr{C}$-отделимости в группе X всех подгрупп из семейства $\mathscr{C}^*(Y)$ [3, предложение 4].

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп,*

$$P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle,$$

$A \neq H$ и подгруппа H лежит в центре группы A. Если группа A/H $\mathscr{C}$-аппроксимируема и группа A $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе H, то группа P $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа B $\mathscr{C}$-аппроксимируема и подгруппа K $\mathscr{C}$-отделима в этой группе.

Следует отметить, что, как показывает основной результат статьи [28], $\mathscr{C}$-аппроксимируемость фактор-группы A/H, вообще говоря, не является необходимой для $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы P, удовлетворяющей всем остальным условиям из формулировки теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп,*

$$E = \langle B, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi \rangle$$

и $H \neq B \neq K$. Пусть также подгруппа H лежит в центре группы B, подгруппа K нормальна в группе B, $L = H \cap K$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) $L = 1$;

2) $L \in \mathscr{C}^*(H)$, $L\varphi = L$ и циклическая группа Φ, порожденная ограничением на подгруппу L изоморфизма φ, принадлежит классу $\mathscr{C}$.

Если группа B $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе HK, то группа E $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы H и K $\mathscr{C}$-отделимы в группе B и подгруппа L $\mathscr{C}$-аппроксимируема.

Заметим, что некоторые из ограничений, накладываемых в теоремах 4 и 5 на группы P и E, оказываются более жесткими, чем в теоремах 1 и 3. Ситуация, когда результаты второго уровня удается получить лишь при несколько более сильных условиях, нежели соответствующие им результаты первого уровня, довольно типична; см. [2, 6, 14]. Поэтому в формулировках последних имеет смысл пытаться ослабить требование принадлежности вершинных групп аппроксимирующему классу. Именно такими соображениями объясняется появление в теоремах 1–3 гомоморфизмов σ и σ_v ($v \in \mathscr{V}$).

Для применения теорем 4 и 5 нужно располагать описанием подгрупп, обладающих свойствами $\mathscr{C}$-отделимости и $\mathscr{C}$-квазирегулярности. В [29] такое описание получено для нильпотентных групп, являющихся $\mathscr{C}$-ограниченными.

Если $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп, состоящий из периодических групп, то через $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathscr{C}$. Абелеву группу назовем *$\mathscr{C}$-ограниченной*, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая числу из множества $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$, имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой $\mathscr{C}$-группы. Будем говорить, что нильпотентная группа *$\mathscr{C}$-ограничена*, если она обладает конечным центральным рядом с $\mathscr{C}$-ограниченными абелевыми факторами. Напомним также, что подгруппа Y группы X называется *$\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированной* в этой группе, если для любых элемента $x \in X$ и простого числа $q \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп,*

$$P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi\rangle,$$

$A \neq H$, $B \neq K$ и подгруппа H лежит в центре группы A. Если группы A и B являются $\mathscr{C}$-ограниченными нильпотентными, то группа P $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы 1 и H $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированы в группе A, подгруппы 1 и K $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированы в группе B.

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп,*

$$E = \langle B, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi\rangle$$

и $H \neq B \neq K$. Пусть также подгруппа H лежит в центре группы B, подгруппа K нормальна в группе B, $L = H \cap K$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) $L = 1$;

2) H/L — периодическая $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-группа конечного периода, $L\varphi = L$ и порядок ограничения на подгруппу L изоморфизма φ конечен и является $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-числом.

Если B — $\mathscr{C}$-ограниченная нильпотентная группа, то группа E $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы 1, H и K $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированы в группе B.

Отметим, что следствия 1 и 2 в отличие от теорем 4 и 5 не требуют от класса $\mathscr{C}$ замкнутости относительно взятия фактор-групп. Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству утверждений, сформулированных в настоящем параграфе.

§ 3. Некоторые вспомогательные понятия и утверждения

Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, X — некоторая группа, Y и Z — ее подгруппы. Заметим, что если $Y \in \mathscr{C}^*(X)$, то

$$Z/Z \cap Y \cong ZY/Y \leq X/Y \in \mathscr{C}$$

и потому $Z \cap Y \in \mathscr{C}^*(Z)$. Если $Y, Z \in \mathscr{C}^*(X)$, то фактор-группа $X/Y \cap Z$ вкладывается в прямое произведение $\mathscr{C}$-групп X/Y, X/Z и потому также принадлежит классу $\mathscr{C}$, откуда $Y \cap Z \in \mathscr{C}^*(X)$. Эти соображения далее будут использоваться без специальных оговорок.

Пусть подгруппа Y нормальна в группе X. Следуя [2], будем говорить, что группа X *$\mathscr{C}$-регулярна* по подгруппе Y, если для каждой нормальной в X подгруппы $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y = M$. Заметим, что если класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то из включений $M \in \mathscr{C}^*(Y)$, $N \in \mathscr{C}^*(X)$, $N \cap Y \leq M$ и нормальности подгруппы M в группе X вытекают соотношения $MN \in \mathscr{C}^*(X)$, $MN \cap Y = M$ и потому $\mathscr{C}$-квазирегулярность X по Y влечет за собой $\mathscr{C}$-регулярность.

Для доказательства теорем 1 и 3 в дополнение к уже введенным выше потребуются еще две свободные конструкции. Пусть

$$\mathscr{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathscr{V}),\ H_e,\ \varphi_{\pm e}\ (e \in \mathscr{E})).$$

Если граф Γ представляет собой звезду, центральной вершине w которой сопоставлена некоторая группа $H = G_w$, а каждому ребру — та же группа $H = H_e$, тождественное отображение $\varphi_{-e}\colon H \to G_w$ и некоторое вложение $\varphi_{+e}\colon H \to G_{e(1)}$, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ называется *свободным произведением семейства групп G_v $(v \in \mathscr{V} \setminus \{w\})$ с одной объединенной подгруппой H.*

Предложение 1 [30, с. 512]. *Пусть*

$$P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle$$

и S — некоторая, не обязательно полная система представителей смежных классов нормализатора $N_A(H)$ подгруппы H в группе A по подгруппе H. Тогда подгруппа

$$Q = \mathrm{sgp}\{s^{-1}Bs \mid s \in S\}$$

группы P представляет собой свободное произведение групп $s^{-1}Bs$ $(s \in S)$ с одной объединенной подгруппой K.

Пусть граф Γ является простым циклом длины $l \geq 4$ и для любых $e, f \in \mathscr{E}$, $\varepsilon, \delta \in \{1, -1\}$ из равенства $e(\varepsilon) = f(\delta)$ следует, что $H_{\varepsilon e} \cap H_{\delta f} = 1$. Тогда фактор-группу

$$\langle G_v\ (v \in \mathscr{V}),\ H_{+e} = H_{-e}\ (e \in \mathscr{E}) \rangle$$

группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ по нормальному замыканию элемента t_d (соответствующего единственному не вошедшему в максимальное поддерево ребру d) называют *полигональным произведением групп* G_v $(v \in \mathscr{V})$ [31].

Известно, что, каким бы ни был граф групп $\mathscr{G}(\Gamma)$, тождественные отображения образующих вершинных групп в группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ продолжаются до инъективных гомоморфизмов [22]. При описанных выше ограничениях на длину цикла и пересечения реберных подгрупп полигональное произведение может быть получено путем последовательного применения конструкции обобщенного свободного произведения двух групп и потому также обладает свойством вложимости в него вершинных групп [32].

Приведем теперь обещанное в § 1 формальное описание фильтрационного метода. Пусть для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ в группе G_v выбрана некоторая нормальная подгруппа R_v. Семейство $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ будем называть *системой совместимых нормальных подгрупп*, если для любого ребра $e \in \mathscr{E}$ справедливо равенство

$$(R_{e(1)} \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1} = (R_{e(-1)} \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1}.$$

Положим

$$R_e = (R_{e(\varepsilon)} \cap H_{\varepsilon e})\varphi_{\varepsilon e}^{-1} \quad (e \in \mathscr{E},\ \varepsilon = \pm 1).$$

Легко видеть, что отображение

$$\varphi_{\mathscr{R},\varepsilon e}\colon H_e/R_e \to G_{e(\varepsilon)}/R_{e(\varepsilon)} \quad (e \in \mathscr{E},\ \varepsilon = \pm 1),$$

переводящее смежный класс hR_e $(h \in H_e)$ в элемент $(h\varphi_{\varepsilon e})R_{e(\varepsilon)}$, корректно определено и является изоморфизмом группы H_e/R_e на подгруппу $H_{\varepsilon e}R_{e(\varepsilon)}/R_{e(\varepsilon)}$. Поэтому наряду с графом групп $\mathscr{G}(\Gamma)$ определен граф групп

$$\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v/R_v\ (v \in \mathscr{V}),\ H_e/R_e,\ \varphi_{\mathscr{R},\pm e}\ (e \in \mathscr{E})).$$

Далее всегда будем предполагать, что представления фундаментальных групп $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ и $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ соответствуют одному и тому же максимальному поддереву в графе Γ. При таком предположении тождественное отображение образующих группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ в группу $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ определяет сюръективный гомоморфизм $\rho_{\mathscr{R}}$ и, как легко видеть, справедливо

Предложение 2. *Гомоморфизм $\rho_{\mathscr{R}}$ продолжает естественные гомоморфизмы $G_v \to G_v/R_v$ $(v \in \mathscr{V})$, и его ядро совпадает с нормальным замыканием в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ множества $\bigcup\limits_{v \in \mathscr{V}} R_v$.*

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп. Назовем систему совместимых нормальных подгрупп $\mathscr{R}$ *$\mathscr{C}$-допустимой*, если существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективный на всех вершинных группах G_v/R_v $(v \in \mathscr{V})$. Вариант фильтрационного метода, предложенный в [24], состоит в том, чтобы аппроксимировать группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ фундаментальными группами графов групп, соответствующих всевозможным $\mathscr{C}$-допустимым системам. Реализует эту идею следующее утверждение, вытекающее из теорем 1–3 в [24].

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный корневой класс групп и $\mathfrak{R}$ — совокупность всех $\mathscr{C}$-допустимых систем совместимых нормальных подгрупп. Пусть также если $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ и $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$, то $\mathscr{R}(v)$ обозначает подгруппу R_v. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если выполняются условия*

$$\forall v \in \mathscr{V} \bigcap_{\mathscr{R} \in \mathfrak{R}} \mathscr{R}(v) = 1, \qquad (i)$$

$$\forall e \in \mathscr{E},\ \varepsilon = \pm 1 \bigcap_{\mathscr{R} \in \mathfrak{R}} H_{\varepsilon e}\mathscr{R}(v) = H_{\varepsilon e}, \qquad (ii)$$

то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$*-аппроксимируема.*

2. *Если группа* $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$*-аппроксимируема, то выполняется условие* (i).

3. *Пусть для любых* $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ *группа* $G_{e(\varepsilon)}$ *отлична от подгруппы* $H_{\varepsilon e}$ *и удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству* $w_{e(\varepsilon)}(x, y)$. *Тогда из* $\mathscr{C}$*-аппроксимируемости группы* $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ *следует выполнение условия* (ii).

В некоторых случаях доказать аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ без использования фильтрационного метода позволяет

Предложение 4 [24, предложение 7]. *Пусть* $\mathscr{C}$ *— произвольный корневой класс групп. Если каждая группа* G_v $(v \in \mathscr{V})$ $\mathscr{C}$*-аппроксимируема и существует гомоморфизм* σ *группы* $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ *на группу из класса* $\mathscr{C}$, *инъективный на всех подгруппах* H_v $(v \in \mathscr{V})$, *то группа* $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$*-аппроксимируема.*

Пусть далее $E = \langle B, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi\rangle$, $P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi\rangle$. Для таких конструкций любая система совместимых нормальных подгрупп $\mathscr{R}$ состоит из одной подгруппы $Q \leq B$ или двух подгрупп $R \leq A$, $S \leq B$ и потому для отображений $\varphi_{\mathscr{R},+e}^{-1}\varphi_{\mathscr{R},-e}$ и $\rho_{\mathscr{R}}$ можно использовать более удобные обозначения: φ_Q, $\varphi_{R,S}$ и ρ_Q, $\rho_{R,S}$ соответственно. Отметим также, что условие совместимости в этих случаях имеет вид $(Q \cap H)\varphi = Q \cap K$ или $(R \cap H)\varphi = S \cap K$.

Говорят, что запись элемента $x \in E$ в виде

$$x = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 \dots x_{n-1} t^{\varepsilon_n} x_n$$
$$(n \geq 0,\ x_0, x_1, \dots, x_n \in B,\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\})$$

приведена, если для каждого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ из равенств $-\varepsilon_i = 1 = \varepsilon_{i+1}$ следует, что $x_i \notin H$, а из равенств $\varepsilon_i = 1 = -\varepsilon_{i+1}$ — что $x_i \notin K$. Запись элемента $x \in P$ в виде $x = x_1 \dots x_n$ $(n \geq 1)$ называется *несократимой*, если каждый сомножитель x_i принадлежит одной из групп A, B и никакие два соседних сомножителя x_i, x_{i+1} не лежат одновременно в A или в B. Число n в обоих случаях называют *длиной* записи. Известно, что если элемент $x \in E$ $(x \in P)$ обладает хотя бы одной приведенной (несократимой) записью длины, большей 0 (соответственно 1), то он отличен от 1.

§ 4. Доказательства теорем 1–3

Заметим прежде всего, что утверждение 2 каждой из доказываемых теорем вытекает из утверждения 1 и предложения 4. Поэтому можно считать далее, что указанные теоремы содержат только утверждение 1, и заметить еще, что если все гомоморфизмы σ_v $(v \in \mathscr{V})$ являются тождественными отображениями, то теорема 2 получается из теоремы 1 очевидной индукцией по числу вершин в дереве Γ.

Если Γ — произвольный граф и для любой вершины $v \in \mathscr{V}$ группа G_v обладает гомоморфизмом σ_v на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективным на подгруппе H_v, то семейство $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$, где $R_v = \ker \sigma_v$, является, очевидно, системой совместимых нормальных подгрупп. Если эта система $\mathscr{C}$-допустима, т. е. группа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ также обладает гомоморфизмом τ на $\mathscr{C}$-группу, действующим инъективно на всех вершинных группах, то композиция $\rho_{\mathscr{R}}\tau$ отображает группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$ и продолжает гомоморфизмы σ_v $(v \in \mathscr{V})$. Поэтому теоремы 1–3 достаточно доказать в предположении, что гомоморфизмы σ и σ_v $(v \in \mathscr{V})$ являются тождественными отображениями. Как отмечено выше, теорема 2 при таком предположении следует из теоремы 1. Стало быть, остается убедиться лишь в справедливости теорем 1 и 3, считая при этом, что $\sigma = \mathrm{id}_B$ (и, в частности, $B \in \mathscr{C}$), $\overline{\varphi} = \varphi$ и N — нормальное замыкание подгруппы K в группе B.

Доказательство теоремы 1. Пусть S — содержащая единицу полная система представителей смежных классов группы A по подгруппе H и

$$Q = \mathrm{sgp}\{s^{-1}Bs \mid s \in S\}.$$

Тогда по предложению 1 подгруппа Q представляет собой свободное произведение подгрупп $s^{-1}Bs$ $(s \in S)$ с одной объединенной подгруппой K. Так как подгруппа H лежит в центре группы A, то для любых $s \in S$, $k \in K$ в группе P имеет место равенство $s^{-1}ks = k$. Поэтому отображение порождающих групп $s^{-1}Bs$ $(s \in S)$ в группу B, переводящее элемент $s^{-1}bs$ в b, может быть продолжено до сюръективного гомоморфизма $\theta\colon Q \to B$.

Легко видеть, что подгруппа Q совпадает с нормальным замыканием подгруппы B в группе P, которое, в свою очередь, служит ядром гомоморфизма $\rho_{H,B}$ в силу предложения 2. Поэтому $Q \cap A = H$ и

$$P/Q = AQ/Q \cong A/Q \cap A = A/H \in \mathscr{C}.$$

Так как $B \in \mathscr{C}$, подгруппа $R = \ker\theta$ принадлежит семейству $\mathscr{C}^*(Q)$. Следовательно, $R \le Q \le P$ — субнормальная последовательность с факторами из класса $\mathscr{C}$ и по условию Грюнберга найдется подгруппа $T \in \mathscr{C}^*(P)$, лежащая в R. Согласно своему определению гомоморфизм θ действует тождественно на группе B. Поэтому $R \cap B = 1$, и так как $T \le R \le Q$, $Q \cap A = H \le B$, то $T \cap A = 1 = T \cap B$. Следовательно, естественный гомоморфизм $P \to P/T$ искомый.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим последовательно два случая.

Случай 1. $N \cap H = 1$.

Обозначим через $\mathfrak{I}$ аддитивную группу кольца $\mathbb{Z}$, если класс $\mathscr{C}$ содержит непериодические группы, или аддитивную группу кольца $\mathbb{Z}_n$ (где $n \ge 4$ — порядок некоторой $\mathscr{C}$-группы), если $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп. Из замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп и расширений следует, что число n с указанными свойствами существует и $\mathfrak{I} \in \mathscr{C}$.

Пусть для каждого $i \in \mathfrak{I}$ B_i — изоморфная копия группы B, $\beta_i\colon B \to B_i$ — соответствующий изоморфизм, $H_i = H\beta_i$, $K_i = K\beta_i$ и $N_i = N\beta_i$. Рассмотрим группу

$$P = \langle B_i;\ H_i = K_{i-1}\ (i \in \mathfrak{I})\rangle,$$

образующими которой являются образующие групп B_i $(i \in \mathfrak{I})$, а определяющими соотношениями — соотношения тех же групп, а также всевозможные соотношения вида $h\varphi\beta_{i-1} = h\beta_i$ $(h \in H,\ i \in \mathfrak{I})$. Очевидно, что группа P представляет собой либо древесное произведение групп B_i $(i \in \mathfrak{I})$, соответствующее бесконечной цепи, если $\mathfrak{I} = \mathbb{Z}^+$, либо полигональное произведение тех же групп, если $\mathfrak{I} = \mathbb{Z}_n^+$. Из соотношений $H \cap K \le H \cap N = 1$ и $n \ge 4$ следует, что в обоих случаях тождественные отображения образующих групп B_i $(i \in \mathfrak{I})$ в группу P продолжаемы до инъективных гомоморфизмов.

Легко видеть, что отображение образующих группы P в себя, действующее как изоморфизмы $\beta_i^{-1}\beta_{i+1}$, определяет автоморфизм α этой группы, порядок которого совпадает с порядком группы $\mathfrak{I}$. Обозначим через Q расщепляемое расширение группы P при помощи циклической группы $\langle\alpha\rangle$ с порождающим α. Нетрудно проверить, что отображение образующих группы E в группу Q, действующее на образующих группы B как изоморфизм β_0 и сопоставляющее букве t элемент α, будучи продолженным до отображения слов, переводит все определяющие соотношения группы E в равенства, верные в группе Q, и потому задает гомоморфизм λ первой во вторую (здесь и далее группы B_i $(i \in \mathfrak{I})$ считаются подгруппами группы P, а последняя отождествляется с соответствующей подгруппой группы Q). Ввиду коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\iota} & E \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} \\ B & \xrightarrow{\beta_0} & Q \end{array}$$

(где ι обозначает вложение, определяемое тождественным отображением образующих) λ действует инъективно на подгруппе B группы E.

Поскольку $N \cap H = 1$, подгруппы HN/N и KH/H фактор-групп B/N и B/H изоморфны подгруппам H и K соответственно. Поэтому для каждого $i \in \mathfrak{I}$ можно рассмотреть обобщенное свободное произведение

$$P_i = \langle (B_i/H_i) * (B_{i+1}/N_{i+1});\ K_iH_i/H_i = H_{i+1}N_{i+1}/N_{i+1},\ \varphi_i\rangle,$$

где изоморфизм

$$\varphi_i \colon K_iH_i/H_i \to H_{i+1}N_{i+1}/N_{i+1}$$

задается правилом

$$xH_i \mapsto \bigl(x\beta_i^{-1}\varphi^{-1}\beta_{i+1}\bigr)N_{i+1}.$$

Легко видеть, что отображение образующих группы P в группу P_i, действующее тождественно на образующих групп B_i, B_{i+1} и переводящее образующие остальных свободных множителей в единицу, определяет сюръективный гомоморфизм $\theta_i \colon P \to P_i$. Так как $B \in \mathscr{C}$ и класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то B_i/H_i, B_{i+1}/N_{i+1}, $B_{i+1}/H_{i+1}N_{i+1} \in \mathscr{C}$ и согласно теореме 1 существует гомоморфизм η_i группы P_i на $\mathscr{C}$-группу, инъективный на ее свободных множителях. Положим $M_i = \ker\theta_i\eta_i$ и $M = M_0 \cap M_{-1}$. Тогда $M_i \in \mathscr{C}^*(P)$, $M_i \cap B_i = H_i$ и $M_i \cap B_{i+1} = N_{i+1}$, откуда $M \in \mathscr{C}^*(P)$ и

$$M \cap B_0 = (M_0 \cap B_0) \cap (M_{-1} \cap B_0) = H_0 \cap N_0 = 1.$$

Так как $\langle\alpha\rangle \cong \mathfrak{I} \in \mathscr{C}$, то $M \le P \le Q$ — субнормальная последовательность с факторами из класса $\mathscr{C}$ и по условию Грюнберга найдется подгруппа $L \in \mathscr{C}^*(Q)$, лежащая в M. Тогда $L \cap B_0 = 1$ и, поскольку $B_0 = B\lambda$, композиция гомоморфизма λ и естественного гомоморфизма $Q \to Q/L$ является искомым отображением.

Случай 2. $N \cap H \ne 1$.

Обозначим пересечение $N \cap H$ через L. Поскольку L — центральная φ-инвариантная подгруппа группы B, определено HNN-расширение

$$E_L = \langle B/L, t;\ t^{-1}(H/L)t = K/L,\ \varphi_L\rangle.$$

Так как $B \in \mathscr{C}$ и класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то $B/L \in \mathscr{C}$. Нетрудно проверить, что в группе B/L имеет место равенство $N/L \cap H/L = 1$ и потому согласно случаю 1 существует гомоморфизм τ_L группы E_L на $\mathscr{C}$-группу, инъективный на подгруппе B/L. В силу теоремы о строении подгрупп HNN-расширений (см., например, [33]) ядро этого гомоморфизма является свободной группой.

Поскольку подгруппа L нормальна в группе E, из предложения 2 вытекает равенство $\ker \rho_L = L$. Следовательно, подгруппа $U = \ker \rho_L \tau_L$ представляет собой расширение группы L при помощи свободной группы. Хорошо известно, что такое расширение расщепляемо, т. е. группа U обладает свободной подгруппой F, удовлетворяющей соотношениям $U = LF$ и $L \cap F = 1$.

Так как подгруппа L нормальна в группе E, определен гомоморфизм $\xi\colon E \to \operatorname{Aut} L$, переводящий элемент $x \in E$ в ограничение на подгруппу L производимого этим элементом внутреннего автоморфизма группы E. Ядро гомоморфизма ξ совпадает с централизатором $C_E(L)$ подгруппы L в группе E, а его образ, ввиду центральности L в B, — с группой Φ. Отсюда, из соотношений

$$U = LF, \quad L \cap F = 1, \quad L \le B \in \mathscr{C},$$
$$FC_E(L)/C_E(L) \le E/C_E(L) \cong \Phi \in \mathscr{C}$$

и замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп и расширений вытекает, что подгруппа $V = C_E(L) \cap F$ нормальна в группе U,

$$F/V \cong FC_E(L)/C_E(L) \in \mathscr{C},$$
$$U/LV = LF/LV \cong F/V(L \cap F) = F/V \in \mathscr{C},$$
$$LV/V \cong L/L \cap V \cong L \in \mathscr{C}$$

и фактор-группа U/V, будучи расширением своей подгруппы LV/V при помощи группы, изоморфной U/LV, содержится в классе $\mathscr{C}$. Из определения гомоморфизма τ_L следует также, что $U \in \mathscr{C}^*(E)$. Поэтому, применяя условие Грюнберга к субнормальному ряду $1 \le V \le U \le E$, можно найти подгруппу $W \in \mathscr{C}^*(E)$, лежащую в V.

Так как гомоморфизм τ_L действует инъективно на подгруппе B/L, то $U \cap B = L$ и из включений $W \le V \le F \le U$ следует, что

$$W \cap B \le F \cap (U \cap B) = F \cap L = 1.$$

Значит, естественный гомоморфизм $E \to E/W$ оказывается искомым отображением.

§ 5. Доказательство теорем 4, 5

Доказательство теоремы 4. Необходимость. $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы B вытекает из $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы P и замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп. Предположим, что подгруппа K не является $\mathscr{C}$-отделимой в группе B и

$$b \in \bigcap_{M \in \mathscr{C}^*(B)} KM \setminus K.$$

Пользуясь соотношением $A \ne H$, выберем некоторый элемент $a \in A \setminus H$ и положим $g = [a, b]$. Тогда элемент g имеет несократимую запись длины 4 и, следовательно, отличен от 1. Вместе с тем, если $N \in \mathscr{C}^*(P)$, то $N \cap B \in \mathscr{C}^*(B)$

и потому $b \in K(N \cap B)$. Отсюда $b \in KN = HN$ и $gN = 1$ ввиду центральности подгруппы H в группе A. Таким образом,

$$g \in \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(P)} N,$$

что противоречит $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы P.

Достаточность. Пусть

$$\Omega = \{(R, S) \mid R \in \mathscr{C}^*(A),\ S \in \mathscr{C}^*(B),\ (R \cap H)\varphi = S \cap K\}.$$

Так как класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, для любой подгруппы $R \in \mathscr{C}^*(A)$ справедливо включение $(A/R)/(HR/R) \in \mathscr{C}$. Отсюда и из теоремы 1 следует, что каждый элемент множества Ω является $\mathscr{C}$-допустимой системой, и согласно предложению 3 для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\bigcap_{(R,S) \in \Omega} R = 1, \qquad \bigcap_{(R,S) \in \Omega} RH = H, \tag{1}$$

$$\bigcap_{(R,S) \in \Omega} S = 1, \qquad \bigcap_{(R,S) \in \Omega} SK = K. \tag{2}$$

Если S — произвольная подгруппа из семейства $\mathscr{C}^*(B)$, то $S \cap K \in \mathscr{C}^*(K)$, $(S \cap K)\varphi^{-1} \in \mathscr{C}^*(H)$ и подгруппа $(S \cap K)\varphi^{-1}$ центральна в группе A. В силу замечания, сделанного в начале § 3, группа A $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе H и потому найдется подгруппа $R \in \mathscr{C}^*(A)$ такая, что $(R, S) \in \Omega$. Стало быть, равенства (2) вытекают из $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы B и $\mathscr{C}$-отделимости в ней подгруппы K.

Пусть $a \in A \setminus \{1\}$ — произвольный элемент. Если $a \in H$, то $a \in B \setminus \{1\}$ и ввиду доказанного выше существует пара $(R, S) \in \Omega$ такая, что $a \notin S$. Поскольку в группе P выполняется равенство $R \cap H = S \cap K$, отсюда следует, что $a \notin R$. Если $a \in A \setminus H$, то в силу $\mathscr{C}$-аппроксимируемости фактор-группы A/H найдется подгруппа $R/H \in \mathscr{C}^*(A/H)$, удовлетворяющая условию $aH \notin R/H$. Тогда $R \in \mathscr{C}^*(A)$, $a \notin R = RH$ и $(R, B) \in \Omega$. Значит, равенства (1) тоже имеют место.

Доказательство теоремы 5. Необходимость условия проверяется практически так же, как и при доказательстве теоремы 4. Предположим, что подгруппа H не $\mathscr{C}$-отделима в группе B и

$$x \in \bigcap_{M \in \mathscr{C}^*(B)} HM \setminus H.$$

Пользуясь неравенством $B \neq K$, выберем некоторый элемент $y \in B \setminus K$ и положим

$$g = [ty^{-1}t^{-1}xtyt^{-1}, x].$$

Тогда элемент g имеет приведенную запись длины 8 и, следовательно, отличен от 1. Вместе с тем если $N \in \mathscr{C}^*(E)$, то $N \cap B \in \mathscr{C}^*(B)$ и потому $x \in H(N \cap B)$, откуда $x \equiv h \pmod{N}$ для некоторого элемента $h \in H$. Так как $t^{-1}ht \in K$ и подгруппа K нормальна в группе B, то $y^{-1}t^{-1}hty \in K$, $ty^{-1}t^{-1}htyt^{-1} \in H$ и $[ty^{-1}t^{-1}htyt^{-1}, h] = 1$, поскольку подгруппа H абелева. Стало быть,

$$g \in \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(E)} N,$$

что противоречит $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы E. В точности так же доказывается $\mathscr{C}$-отделимость в группе B подгруппы K. $\mathscr{C}$-аппроксимируемость подгруппы L следует из $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы E и замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп.

Достаточность. Заметим прежде всего, что из $\mathscr{C}$-отделимости в группе B подгрупп H и K легко следует $\mathscr{C}$-отделимость в этой группе подгруппы L и что $\mathscr{C}$-квазирегулярность группы B по подгруппе HK, как показано в § 3, влечет за собой $\mathscr{C}$-регулярность по той же подгруппе. Дальнейшие рассуждения зависят от того, какое из условий 1, 2 имеет место.

Пусть выполняется условие 1, T — произвольная подгруппа из семейства $\mathscr{C}^*(B)$ и $U = (T \cap H)\varphi \cap (T \cap K)$. Так как $T \cap H \in \mathscr{C}^*(H)$ и $T \cap K \in \mathscr{C}^*(K)$, то $(T \cap H)\varphi \in \mathscr{C}^*(K)$, $U \in \mathscr{C}^*(K)$ и $HU \in \mathscr{C}^*(HK)$. Отсюда ввиду $\mathscr{C}$-квазирегулярности группы B по подгруппе HK вытекает существование подгруппы $V \in \mathscr{C}^*(B)$, удовлетворяющей соотношению $V \cap HK \leq HU$. Обозначим подгруппу $V \cap K$ через W. Тогда $W \in \mathscr{C}^*(K)$, $W\varphi^{-1} \in \mathscr{C}^*(H)$, и так как $H \cap K = 1$, то $(W\varphi^{-1})W \in \mathscr{C}^*(HK)$ и

$$W = (V \cap HK) \cap K \leq HU \cap K = U.$$

Из центральности в группе B подгруппы H и нормальности в той же группе подгруппы K следует, что подгруппы W, $W\varphi^{-1}$ и $(W\varphi^{-1})W$ нормальны в группе B. Значит, в силу $\mathscr{C}$-регулярности группы B по подгруппе HK найдется подгруппа $S \in \mathscr{C}^*(B)$, удовлетворяющая условию $S \cap HK = (W\varphi^{-1})W$. Положим $R = S \cap T$. Тогда $R \in \mathscr{C}^*(B)$, и так как U, $U\varphi^{-1} \leq T$, то $(W\varphi^{-1})W \leq T$ и

$$R \cap HK = T \cap (S \cap HK) = (W\varphi^{-1})W.$$

Отсюда и из соотношения $H \cap K = 1$ вытекает, что

$$R \cap H = (R \cap HK) \cap H = W\varphi^{-1}, \quad R \cap HK = (R \cap H)(R \cap H)\varphi.$$

Таким образом, произвольная подгруппа T из семейства $\mathscr{C}^*(B)$ содержит некоторую подгруппу из семейства

$$\Omega = \{R \in \mathscr{C}^*(B) \mid R \cap HK = (R \cap H)(R \cap H)\varphi\}$$

и в силу $\mathscr{C}$-отделимости в группе B подгрупп $L = 1$, H и K

$$\bigcap_{R \in \Omega} R = 1, \quad \bigcap_{R \in \Omega} RH = H, \quad \bigcap_{R \in \Omega} RK = K. \tag{3}$$

Заметим, что если $R \in \Omega$, то из соотношения $H \cap K = 1$ вытекают равенства

$$R \cap K = (R \cap HK) \cap K = (R \cap H)\varphi$$

и потому определено HNN-расширение

$$E_R = \langle B/R, t;\ t^{-1}(HR/R)t = KR/R,\ \varphi_R \rangle.$$

Если $hR = kR$ для некоторых $h \in H$, $k \in K$, то $h^{-1}k \in R \cap HK$ и ввиду того же соотношения $h \in R \cap H$, откуда $h, k \in R$. Следовательно, $HR/R \cap KR/R = 1$ и согласно теореме 3 группа E_R обладает гомоморфизмом на $\mathscr{C}$-группу, действующим инъективно на подгруппе B/R. Это означает, что система $\{R\}$ является $\mathscr{C}$-допустимой и $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы E вытекает из равенств (3) в силу предложения 3.

Пусть выполняется условие 2 и $R \in \mathscr{C}^*(L)$ — некоторая φ-инвариантная подгруппа. Поскольку подгруппа R центральна в группе B и нормальна в группе E, определено HNN-расширение

$$E_R = \langle B/R, t;\ t^{-1}(H/R)t = K/R,\ \varphi_R\rangle,$$

изоморфное ввиду предложения 2 фактор-группе E/R. Покажем, что группа E_R удовлетворяет всем условиям теоремы 3.

Так как $L \in \mathscr{C}^*(H)$ и $L = L\varphi \in \mathscr{C}^*(K)$, то $L \in \mathscr{C}^*(HK)$ и $R \in \mathscr{C}^*(HK)$ в силу замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия расширений. Поэтому, пользуясь $\mathscr{C}$-регулярностью группы B по подгруппе HK, можно найти подгруппу $S \in \mathscr{C}^*(B)$, удовлетворяющую условию $S \cap HK = R$. Из последнего равенства следует, что $S/R \cap HK/R = 1$ и, стало быть, естественный гомоморфизм σ группы B/R на $\mathscr{C}$-группу $(B/R)/(S/R)$ действует инъективно на подгруппе HK/R. Легко видеть, что подгруппа $L\rho_R$ φ_R-инвариантна и совпадает с подгруппой $H/R \cap K/R$, а циклическая группа, порожденная ограничением на эту подгруппу изоморфизма φ_R, служит гомоморфным образом группы Φ и потому содержится в $\mathscr{C}$. Так как гомоморфизм σ действует инъективно на подгруппе HK/R, теми же свойствами обладает подгруппа $(H/R)\sigma \cap (K/R)\sigma$ и, значит, все условия теоремы 3 оказываются выполненными. Покажем теперь, что фактор-группа B/R $\mathscr{C}$-аппроксимируема и потому группа E_R аппроксимируется классом $\mathscr{C}$ согласно утверждению 2 указанной теоремы.

Пусть $b \in B \setminus R$ — произвольный элемент. Если $b \in B \setminus L$, то в силу $\mathscr{C}$-отделимости подгруппы L в группе B найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(B)$ такая, что $b \notin LN$ и потому $b \notin RN$. Если $b \in L \setminus R$, то из равенства $S \cap HK = R$ вытекает, что $b \notin RS$. Стало быть, $bR \notin MR/R$ (где $M = N$ или $M = S$) и ввиду замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия фактор-групп из включения $B/M \in \mathscr{C}$ следует, что

$$(B/R)/(MR/R) \cong B/MR \cong (B/M)/(MR/M) \in \mathscr{C}.$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно выбрать произвольный элемент $g \in E \setminus \{1\}$ и указать не содержащую его φ-инвариантную подгруппу $R \in \mathscr{C}^*(L)$. Ввиду установленной выше $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы E_R в этом случае гомоморфизм ρ_R можно будет продолжить до гомоморфизма группы E на $\mathscr{C}$-группу, переводящего g в неединичный элемент.

Если $g \notin L$, то в качестве R можно взять подгруппу L. В противном случае воспользуемся $\mathscr{C}$-аппроксимируемостью группы L, найдем не содержащую g подгруппу $Q \in \mathscr{C}^*(L)$ и положим $R = \bigcap\limits_{\psi \in \Phi} Q\psi$. Легко видеть, что подгруппа R φ-инвариантна и $g \notin R$. По теореме Ремака фактор-группа L/R вкладывается в декартово произведение D групп $L/Q\psi$ ($\psi \in \Phi$), каждая из которых изоморфна $\mathscr{C}$-группе L/Q. Отсюда, из включения $\Phi \in \mathscr{C}$ и определения корневого класса следует, что $D \in \mathscr{C}$ и $L/R \in \mathscr{C}$. Стало быть, подгруппа R искомая.

§ 6. Доказательство следствий

Утверждения, собранные в следующем предложении, являются частными случаями предложения 5.2, теоремы 2.2, предложений 6.1 и 6.3 из [29] соответственно.

Предложение 5. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, X — $\mathscr{C}$-ограниченная нильпотентная группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Все подгруппы и фактор-группы группы X являются $\mathscr{C}$-ограниченными нильпотентными группами.*

2. *Подгруппа группы X $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в ней.*

3. *Если группа X имеет конечный период, являющийся $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-числом, то $X \in \mathscr{C}$.*

4. *Группа X $\mathscr{C}$-квазирегулярна по любой своей подгруппе.*

Приводимое далее предложение позволяет считать, что класс $\mathscr{C}$ из формулировок следствий 1 и 2 замкнут относительно взятия фактор-групп.

Предложение 6 [29, предложение 8.7]. *Пусть для некоторой группы X известно необходимое или достаточное условие ее аппроксимируемости произвольным корневым классом $\mathscr{C}$, состоящим из периодических групп и замкнутым относительно взятия фактор-групп. Если составляющие данного условия, связанные с классом $\mathscr{C}$, зависят лишь от множества $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ и свойства $\mathscr{C}$-ограниченности, то это же условие аппроксимируемости группы X оказывается справедливым и для произвольного корневого класса, состоящего из периодических групп.*

Доказательство следствия 1. Пусть F — свободная группа с базисом $\{x, y\}$, $w_1 = y$ и $w_k = [x, w_{k-1}]$ $(k \geq 2)$. Нетрудно проверить, что для каждого $k \geq 1$ элемент w_k отличен от 1 в группе F. Так как группы A и B удовлетворяют тождеству $w_{c+1}(x, y)$, где c — максимум из их ступеней нильпотентности, то ввиду предложения 3 из $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы P следует $\mathscr{C}$-отделимость в этих группах подгрупп H и K. Согласно предложению 5

– группа A $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе H;

– $\mathscr{C}$-аппроксимируемость фактор-группы A/H равносильна отсутствию в ней $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения, что, в свою очередь, означает $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированность и $\mathscr{C}$-отделимость подгруппы H в группе A;

– $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы B и $\mathscr{C}$-отделимость в ней подгруппы K равносильны $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированности подгрупп 1 и K в группе B.

Понятно, что если группа P $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то тем же свойством обладают ее подгруппы A, B и потому единичная подгруппа $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в них. Таким образом, необходимость утверждения следствия вытекает из установленных выше свойств группы P, а достаточность — из теоремы 4.

Доказательство следствия 2. Легко видеть, что любая циклическая группа является $\mathscr{C}$-ограниченной нильпотентной. Если выполняется условие 2, то в силу предложения 5 то же верно в отношении группы H/L и, значит, согласно упомянутому предложению $H/L \in \mathscr{C}$ и $\Phi \in \mathscr{C}$. $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы L и $\mathscr{C}$-отделимость в группе B подгрупп H и K равносильны $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированности единичной подгруппы в группе L и подгрупп H и K в группе B. Понятно, что отсюда вытекает и $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированность единичной подгруппы в группе B. $\mathscr{C}$-квазирегулярность группы B по подгруппе HK имеет место в силу предложения 5. Стало быть, следствие 2 получается непосредственно из теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. № 5. С. 6–10.
2. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.
3. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.
4. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 2020. № 3. С. 48–63.
5. *Tieudjo D.* On root-class residuality of some free constructions // JP J. Algebra, Number Theory Appl. 2010. V. 18, N 2. P. 125–143.
6. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.
7. *Гольцов Д. В.* Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 665–669.
8. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Мат. заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 597–612.
9. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 6. С. 720–740.
10. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых HNN-расширений групп // Изв. вузов. Математика. 2020. № 12. С. 41–50.
11. *Sokolov E. V.* Certain residual properties of HNN-extensions with central associated subgroups // Comm. Algebra. 2022. V. 50, N 3. P. 962–987.
12. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 891–906.
13. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений с центральными объединенными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 692–702.
14. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1382–1400.
15. *Sokolov E. V., Tumanova E. A.* To the question of the root-class residuality of free constructions of groups // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, N 2. P. 260–272.
16. *Sokolov E. V.* Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups // J. Algebra. 2021. V. 582. P. 1–25.
17. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1957. V. 7, N 1. P. 29–62.
18. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. V. 43, N 2. P. 856–860.
19. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб. 1949. Т. 25, № 3. С. 347–366.
20. *Serre J.-P.* Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1980.
21. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
22. *Karras A., Solitar D.* The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 150, N 1. P. 227–255.
23. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
24. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.
25. *Kahrobaei D.* On residual solvability of generalized free products of finitely generated nilpotent groups // Comm. Algebra. 2011. V. 39, N 2. P. 647–656.
26. *Kahrobaei D., Majewicz S.* On the residual solvability of generalized free products of solvable groups // DMTCS. 2012. V. 13, N 4. P. 45–50.

27. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
28. *Baumslag G.* On the residual nilpotence of certain one-relator groups // Comm. Pure Appl. Algebra. 1968. V. 21, N 5. P. 491–506.
29. *Sokolov E. V.* On the separability of subgroups of nilpotent groups by root classes of groups // J. Group Theory. 2023. DOI: 10.1515/jgth-2022-0021.
30. *Neumann B. H.* An essay on free products of groups with amalgamations // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1954. V. 246, N 919. P. 503–554.
31. *Allenby R. B. J. T.* The residual finiteness of polygonal products — two counterexamples // Canad. Math. Bull. 1994. V. 37, N 4. P. 433–436.
32. *Allenby R. B. J. T.* Polygonal products of polycyclic by finite groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1996. V. 54, N 3. P. 369–372.
33. *Cohen D. E.* Subgroups of HNN groups // J. Austral. Math. Soc. 1974. V. 17, N 4. P. 394–405.

Поступила в редакцию 4 июня 2022 г.
После доработки 4 июня 2022 г.
Принята к публикации 10 октября 2022 г.

Соколов Евгений Викторович (ORCID 0000-0002-8256-8016),
Туманова Елена Александровна (ORCID 0000-0002-6193-9834)
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
ev-sokolov@yandex.ru, helenfog@bk.ru