Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2026. Том 67, № 1

УДК 512.543

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ДРЕВЕСНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП С НОРМАЛЬНЫМИ РЕБЕРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Е. В. Соколов, Е. А. Туманова

Аннотация. Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, т. е. класс, содержащий неединичные группы и замкнутый относительно взятия подгрупп и декартовых сплетений. Пусть также P — древесное произведение групп, каждая реберная подгруппа которого нормальна в содержащей ее вершинной группе. В статье указан ряд достаточных условий существования гомоморфизма группы P на $\mathscr{C}$-группу, действующего инъективно на всех вершинных группах. Доказаны также некоторые достаточные условия аппроксимируемости группы P классом $\mathscr{C}$.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.113

Ключевые слова: аппроксимационные свойства, финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость разрешимыми группами, корневой класс групп, древесное произведение групп, фундаментальная группа графа групп.

§ 1. Введение

В соответствии с [1, 2] класс групп $\mathscr{C}$ будем называть *корневым*, если он содержит неединичные группы, замкнут относительно взятия подгрупп и удовлетворяет любому из приводимых ниже условий, равносильность которых установлена в [3]:

1) для произвольной группы X и субнормального ряда $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$, факторы X/Y и Y/Z которого принадлежат классу $\mathscr{C}$, существует нормальная подгруппа N группы X такая, что $X/N \in \mathscr{C}$ и $N \leqslant Z$ (*условие Грюнберга*);

2) класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия декартовых сплетений;

3) класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия расширений и вместе с любыми двумя группами X и Y содержит декартово произведение $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$.

Легко видеть, что корневыми являются, например, классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), периодических $\mathfrak{P}$-групп конечного периода (где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп и всех групп без кручения. Нетрудно показать также, что если пересечение семейства корневых классов групп содержит неединичную группу, то оно снова оказывается корневым классом.

Использование понятия корневого класса оказалось весьма продуктивным при исследовании аппроксимируемости свободных конструкций групп: свободных и древесных произведений, HNN-расширений, фундаментальных групп графов групп и др. (древесные произведения подробно рассматриваются ниже,

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00307, `https://rscf.ru/project/24-21-00307/`

определения остальных структур могут быть найдены, например, в [4]). Понятно, что изучение аппроксимируемости сразу целым семейством классов групп дает возможность доказать несколько утверждений одновременно. Более важно, однако, то, что результаты об аппроксимируемости произвольными корневыми классами и методы их получения хорошо согласуются друг с другом, и это позволяет легко переходить от одной свободной конструкции к другой, быстро продвигаясь в направлении усложнения рассматриваемых групп (см., например, [5–13]).

Напомним, что согласно [14] группа X называется *аппроксимируемой классом групп* $\mathcal{C}$ или, более коротко, $\mathcal{C}$*-аппроксимируемой*, если каждый ее неединичный элемент переходит в неединичный под действием некоторого гомоморфизма группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$*-группу*). Если $\mathcal{C}$ — класс всех конечных групп, то $\mathcal{C}$-аппроксимируемую группу называют также *финитно аппроксимируемой*.

При изучении аппроксимируемости корневым классом $\mathcal{C}$ древесного произведения групп основным является вопрос о том, наследует ли данная конструкция свойство $\mathcal{C}$-аппроксимируемости от своих вершинных групп. Исчерпывающий ответ на этот вопрос получен лишь для древесного произведения с тривиальными реберными подгруппами, т. е. обычного свободного произведения групп: в [1, 2] установлено, что свободное произведение произвольного семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{C}$, в свою очередь аппроксимируется данным классом. Для древесных произведений, устроенных сложнее, свойство $\mathcal{C}$-аппроксимируемости удается исследовать лишь при тех или иных дополнительных ограничениях, накладываемых на вершинные группы и реберные подгруппы. Наибольшее число результатов получено в предположении, что реберные подгруппы являются циклическими [15–23] или лежат в центрах вершинных групп [12, 13, 17, 22, 23]. В [6] доказан критерий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости древесного произведения, всякая реберная подгруппа которого служит ретрактом соответствующей вершинной группы. В настоящей статье аппроксимируемость древесных произведений изучается в предположении, что каждая реберная подгруппа нормальна в содержащей ее вершинной группе. Такое ограничение рассматривалось ранее лишь в [24] и, в несколько ослабленном варианте, в [25]. Однако в обеих этих работах речь шла исключительно о финитной аппроксимируемости.

Основным методом исследования аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений групп служит так называемый «фильтрационный подход», первоначально предложенный в [26] для изучения финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой и, после ряда обобщений и адаптаций, распространенный в [27] на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп и фундаментальной группы произвольного графа групп. Данный метод включает два шага и может быть описан следующим образом.

Первый шаг состоит в отыскании условий, при которых древесное произведение $\mathfrak{T}$ обладает гомоморфизмом на группу из аппроксимирующего корневого класса $\mathcal{C}$, действующим инъективно на всех вершинных группах. Иногда (например, если граф и все вершинные группы конечны) существование гомоморфизма с указанными свойствами равносильно $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{T}$. Однако в общем случае это не так [28, 29]. Полученные на данном шаге утверждения будем называть *результатами первого уровня*. Следует отметить, что общих подходов к их отысканию нет и каждый новый факт такого типа является весьма удачной находкой.

Второй шаг метода заключается в поиске условий, которые достаточно наложить на группу $\mathfrak{T}$ для того, чтобы она аппроксимировалась древесными произведениями групп, удовлетворяющими требованиям полученных ранее результатов первого уровня. Это позволяет установить $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы $\mathfrak{T}$ в случае, когда вершинные группы графа не обязательно принадлежат классу $\mathscr{C}$. Найденные на данном шаге условия аппроксимируемости будем называть *результатами второго уровня*. Как правило, доказать их удается лишь при ограничениях, более сильных, нежели на шаге 1.

В случае, когда реберные подгруппы нормальны в содержащих их вершинных группах, важную роль в описании результатов первого уровня играют группы автоморфизмов указанных подгрупп, индуцированных внутренними автоморфизмами группы $\mathfrak{T}$. Первым на это указал Хигман [30], доказавший критерий аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух конечных групп с нормальной объединенной подгруппой. В магистерской диссертации Е. А. Тумановой, выполненной под руководством Д. И. Молдаванского, данный критерий был распространен на случай аппроксимируемости классом конечных $\mathfrak{P}$-групп, где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел [31]. Следующее обобщение, уже для произвольного корневого аппроксимирующего класса групп, замкнутого относительно взятия фактор-групп, было найдено Е. А. Тумановой в [32] и содержится в теореме 1, приведенной в § 2. В настоящей работе идеи, позволяющие доказать указанную теорему, используются для получения результатов первого уровня применительно к конструкции древесного произведения конечного числа групп (см. теоремы 2 и 3 ниже). Сложность данной задачи состоит в том, что реберные подгруппы являются нормальными уже не во всей группе, а только лишь в некоторой ее части. Для той же конструкции древесного произведения с нормальными реберными подгруппами найден и ряд достаточных условий второго уровня (теоремы 5–7), причем в некоторых из них конечность дерева уже не предполагается.

§ 2. Формулировка результатов уровня 1

Всюду далее будем считать, что $\mathscr{T}$ — неориентированное дерево с множеством вершин $\mathscr{V}$ и непустым множеством ребер $\mathscr{E} \subseteq \{\{v, w\} \mid v, w \in \mathscr{V}\}$; $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ — граф групп над $\mathscr{T}$, в котором каждой вершине $v \in \mathscr{V}$ сопоставлена некоторая группа G_v, а каждому ребру $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ — подгруппы $H_{vw} \leqslant G_v$, $H_{wv} \leqslant G_w$ и взаимообратные изоморфизмы $\varphi_{vw}\colon H_{vw} \to H_{wv}$, $\varphi_{wv}\colon H_{wv} \to H_{vw}$. Напомним, что *древесным произведением*, соответствующим графу групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$, называется фундаментальная группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ этого графа, т. е. группа, образующими которой являются образующие групп G_v ($v \in \mathscr{V}$), а определяющими соотношениями — соотношения тех же групп, а также всевозможные соотношения вида $h = h\varphi_{vw}$, где $\{v, w\} \in \mathscr{E}$, h и $h\varphi_{vw}$ — слова в образующих групп G_v и G_w, задающие элемент подгруппы H_{vw} и его образ относительно изоморфизма φ_{vw}. Группы G_v ($v \in \mathscr{V}$) будем называть *вершинными*, а подгруппы H_{vw} и H_{wv} ($\{v, w\} \in \mathscr{E}$) — *реберными*.

Если $\mathscr{T}'$ — непустое поддерево дерева $\mathscr{T}$, то через $\mathscr{G}(\mathscr{T}')$ будем обозначать граф групп, вершинам и ребрам которого сопоставлены те же группы, подгруппы и изоморфизмы, что и в графе $\mathscr{G}(\mathscr{T})$. Хорошо известно (см., например, [33, теорема 1]), что древесное произведение $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}'))$ вкладывается в древесное произведение $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ посредством тождественного отображения образующих и совпадает, таким образом, с подгруппой группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$, порожденной образующими групп $G_{v'}$ $(v' \in \mathscr{V}')$, где $\mathscr{V}'$ — множество вершин поддерева $\mathscr{T}'$. В частности, все группы G_v $(v \in \mathscr{V})$ можно считать подгруппами древесного произведения $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$. При таком допущении для всякого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ подгруппы H_{vw} и H_{wv} оказываются совпадающими в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$, и мы будем обозначать их одним символом $H_{\{v,w\}}$, когда это удобно.

Напомним, что если дерево $\mathscr{T}$ содержит две вершины v, w и соединяющее их ребро, то древесное произведение $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ называется *обобщенным свободным произведением групп G_v и G_w с объединенной подгруппой $H_{\{v,w\}}$*, а вершинные группы G_v и G_w — *свободными множителями* данного произведения. Из отмеченного выше следует, что в общем случае для всякого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ подгруппа $P_{\{v,w\}} = \operatorname{sgp}\{G_v \cup G_w\}$ группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ раскладывается в обобщенное свободное произведение своих подгрупп G_v и G_w с объединенной подгруппой $H_{\{v,w\}}$.

Предваряя формулировку упоминавшейся выше теоремы 1, заметим, что если X — некоторая группа и Y — ее нормальная подгруппа, то множество ограничений на Y всевозможных внутренних автоморфизмов группы X образует подгруппу группы $\operatorname{Aut} Y$, обозначаемую далее через $\operatorname{Aut}_X(Y)$. Определяемые подобным образом группы автоморфизмов фигурируют во всех основных результатах настоящей статьи.

Теорема 1 [32, следствие 1]. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и P — обобщенное свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, нормальной в указанных группах. Если A, $B \in \mathscr{C}$, то следующие утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа P $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

1. *Существует гомоморфизм обобщенного свободного произведения P на группу из класса $\mathscr{C}$, действующий инъективно на свободных множителях A и B.*

2. $\operatorname{Aut}_P(H) \in \mathscr{C}$.

Всюду далее через $\mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v)$ будем обозначать окружение вершины v в дереве $\mathscr{T}$, т. е. множество вершин, инцидентных v. Будем говорить, что граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ *удовлетворяет условию* (†), если

1) для любого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ подгруппа H_{vw} нормальна в группе G_v и подгруппа H_{wv} нормальна в группе G_w;

2) для каждой вершины $u \in \mathscr{V}$ подгруппа $K_u = \prod_{w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u)} H_{uw}$ представляет собой прямое произведение своих сомножителей.

Заметим, что при выполнении требования 1 для всякого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ подгруппа $H_{\{v,w\}}$ оказывается нормальной в обобщенном свободном произведении $P_{\{v,w\}}$ и потому определена группа $\mathfrak{H}_{\{v,w\}} = \operatorname{Aut}_{P_{\{v,w\}}}(H_{\{v,w\}})$, порождаемая, очевидно, своими подгруппами $\mathfrak{F}_{vw} = \operatorname{Aut}_{G_v}(H_{\{v,w\}})$ и $\mathfrak{F}_{wv} = \operatorname{Aut}_{G_w}(H_{\{v,w\}})$. Из теоремы 1 следует, что если $\mathscr{C}$ — гомоморфно замкнутый корневой класс групп, то включения $\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$ $(\{v, w\} \in \mathscr{E})$ являются необходимым условием существования гомоморфизма древесного произведения $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, действующего инъективно на всех вершинных группах. Следующая теорема показывает, что при выполнении требования 2 это условие становится и достаточным.

Теорема 2. *Пусть дерево $\mathscr{T}$ конечно, граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (†) и $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фак-*

тор-групп. Если $G_v \in \mathscr{C}$ для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$, то следующие утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.

1. *Существует гомоморфизм древесного произведения $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, действующий инъективно на каждой вершинной группе G_v $(v \in \mathscr{V})$.*

2. *$\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$ для всякого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$.*

Весьма жесткое условие тривиальности пересечения реберных подгрупп из теоремы 2 можно несколько ослабить следующим образом. Для каждой вершины $u \in \mathscr{V}$ положим $L_u = \bigcap_{w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u)} H_{uw}$ и будем говорить, что граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ *удовлетворяет условию* (‡), если

1) для любого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ подгруппа H_{vw} нормальна в группе G_v и подгруппа H_{wv} нормальна в группе G_w;

2) для каждой вершины $u \in \mathscr{V}$ подгруппа K_u/L_u представляет собой прямое произведение подгрупп H_{uw}/L_u $(w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u))$;

3) $L_v = L_w$ для всякого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$.

Очевидно, что если граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (‡), то в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ все подгруппы L_v $(v \in \mathscr{V})$ оказываются совпадающими. Будем обозначать эту единую подгруппу через L. Понятно, что она нормальна в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ и потому определена группа $\mathfrak{L} = \mathrm{Aut}_{\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))}(L)$, порождаемая своими подгруппами $\mathfrak{M}_v = \mathrm{Aut}_{G_v}(L)$ $(v \in \mathscr{V})$.

Теорема 3. *Пусть дерево $\mathscr{T}$ конечно, граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (‡) и $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Если $G_v \in \mathscr{C}$ для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$, то следующие утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

1. *Существует гомоморфизм древесного произведения $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, действующий инъективно на каждой вершинной группе G_v $(v \in \mathscr{V})$.*

2. *$\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$ для всякого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ и $\mathfrak{L} \in \mathscr{C}$.*

Теорема 3 обобщает теорему 2, однако в статье было решено оставить оба результата, поскольку, во-первых, формулировка условия (†) проще, чем условия (‡), и, во-вторых, доказательство теоремы 3 опирается на теорему 2. Теорема 3, в свою очередь, может быть обобщена следующим образом.

Теорема 4. *Пусть дерево $\mathscr{T}$ конечно, граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (‡) и $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Если для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ существует гомоморфизм σ_v группы G_v на группу из класса $\mathscr{C}$, действующий инъективно на подгруппе K_v, то следующие утверждения равносильны и при выполнении любого из них $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ равносильна $\mathscr{C}$-аппроксимируемости всех групп G_v $(v \in \mathscr{V})$.*

1. *Существует гомоморфизм древесного произведения $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, продолжающий гомоморфизмы σ_v $(v \in \mathscr{V})$.*

2. *$\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$ для каждого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ и $\mathfrak{L} \in \mathscr{C}$.*

Приведенная теорема может быть названа результатом уровня 1^+. Как показывает работа [34], подобные ей утверждения иногда оказываются полезны для получения новых результатов уровня 1.

Понятно, что если класс $\mathscr{C}$ состоит, скажем, из конечных групп, дерево $\mathscr{T}$ бесконечно и среди реберных подгрупп встречаются группы сколь угодно большого порядка, то вложить их все в одну $\mathscr{C}$-группу нельзя. Поэтому условие конечности дерева в теоремах 2–4 существенно.

§ 3. Формулировка результатов уровня 2

Переходя к описанию достаточных условий второго уровня, отметим прежде всего, что если граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (‡), то согласно приведенному ниже предложению 4.9 необходимым условием $\mathscr{C}$-аппроксимируемости древесного произведения $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ является лишь $\mathscr{C}$-аппроксимируемость групп $\mathfrak{H}_{\{v,w\}}$ ($\{v,w\} \in \mathscr{E}$) и $\mathfrak{L}$. Включения $\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$ ($\{v,w\} \in \mathscr{E}$) и $\mathfrak{L} \in \mathscr{C}$, фигурировавшие в теоремах 2–4, перестают быть необходимыми для $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$, как показывает

Пример 1. Пусть A и B — две изоморфные группы, представляющие собой расширения свободной абелевой группы $H = \langle h_1, h_2;\ [h_1, h_2] = 1\rangle$ при помощи бесконечных циклических групп с порождающими a и b. И пусть сопряжения при помощи указанных порождающих действуют на подгруппе H как автоморфизм α, переводящий h_1 в h_1h_2 и h_2 в h_2. Тогда обобщенное свободное произведение P групп A и B с объединенной подгруппой H финитно аппроксимируемо в силу теоремы 9 из [26]. Но $\mathrm{Aut}_A(H) = \mathrm{Aut}_B(H) = \mathrm{Aut}_P(H)$ — бесконечная циклическая группа, порожденная автоморфизмом α.

Вместе с тем именно более сильные ограничения $\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$ ($\{v,w\} \in \mathscr{E}$) и $\mathfrak{L} \in \mathscr{C}$ позволяют достаточно легко воспользоваться теоремами 2 и 3 для получения результатов уровня 2. Поиски возможностей ослабления указанных ограничений привели к появлению следующего набора условий (в нем и далее символ $\mathscr{C}^*(X)$ обозначает семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{C}$).

(η) Для любого ребра $\{v,w\} \in \mathscr{E}$ хотя бы одна из подгрупп $\mathfrak{F}_{vw}$, $\mathfrak{F}_{wv}$ нормальна в группе $\mathfrak{H}_{\{v,w\}}$ или $\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$.

(λ) Все (кроме, быть может, одной) подгруппы $\mathfrak{M}_v$ ($v \in \mathscr{V}$) нормальны в группе $\mathfrak{L}$ или $\mathfrak{L} \in \mathscr{C}$.

($\bar{\eta}$) Для любого ребра $\{v,w\} \in \mathscr{E}$ выполняется хотя бы одно из следующих утверждений: а) $\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$; б) по крайней мере одна из подгрупп $\mathfrak{F}_{vw}$, $\mathfrak{F}_{wv}$ нормальна в группе $\mathfrak{H}_{\{v,w\}}$ и каждая подгруппа $M \in \mathscr{C}^*(H_{\{v,w\}})$ содержит подгруппу $N \in \mathscr{C}^*(H_{\{v,w\}})$, нормальную в группе $P_{\{v,w\}}$.

($\bar{\lambda}$) Выполняется хотя бы одно из следующих утверждений: а) $\mathfrak{L} \in \mathscr{C}$; б) все (кроме, быть может, одной) подгруппы $\mathfrak{M}_v$ ($v \in \mathscr{V}$) нормальны в группе $\mathfrak{L}$ и каждая подгруппа $M \in \mathscr{C}^*(L)$ содержит подгруппу $N \in \mathscr{C}^*(L)$, нормальную в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$.

Заметим, что утверждение (η) имеет место, если для любого ребра $\{v,w\} \in \mathscr{E}$ подгруппа $H_{\{v,w\}}$ является локально циклической или лежит в центре хотя бы одной из содержащих ее вершинных групп. В первом случае группа $\mathfrak{H}_{\{v,w\}}$ абелева (см., например, [35, § 113, упражнение 4]), во втором — совпадает с одной из подгрупп $\mathfrak{F}_{vw}$, $\mathfrak{F}_{wv}$. Аналогичные соображения справедливы и в отношении утверждения (λ).

Будем говорить, что группа X *$\mathscr{C}$-квазирегулярна* по своей подгруппе Y, если для каждой подгруппы $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ существует подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y \leqslant M$. Свойство $\mathscr{C}$-квазирегулярности тесно связано с классическим понятием $\mathscr{C}$-отделимой подгруппы [36] и играет важную роль при построении ядер гомоморфизмов свободных конструкций групп, отображающих их на группы из класса $\mathcal{C}$. Поэтому оно весьма часто встречается в формулировках достаточных условий $\mathcal{C}$-аппроксимируемости указанных конструкций (см., например, [5, 34, 37, 38]). Ряд ситуаций, при которых группа оказывается $\mathcal{C}$-квазирегулярной по своей подгруппе, описан в [21, 39, 40].

Теорема 5. *Пусть дерево $\mathcal{T}$ конечно, граф групп $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ удовлетворяет условию (‡), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и выполняются условия $(\bar{\eta})$ и $(\bar{\lambda})$. Пусть также*

1) *для любого ребра $\{v, w\} \in \mathcal{E}$ группы $G_v/H_{\{v,w\}}$ и $G_w/H_{\{v,w\}}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы;*

2) *для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа G_v $\mathcal{C}$-аппроксимируема и $\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппам L и K_v.*

Тогда группа $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой.

Отметим, что ряд случаев, когда $\mathcal{C}$-аппроксимируемость групп $G_v/H_{\{v,w\}}$ и $G_w/H_{\{v,w\}}$ для некоторого ребра $\{v, w\} \in \mathcal{E}$ оказывается необходимой для $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$, описан в [21, 27, 32, 41, 42].

В следующих двух теоремах дерево $\mathcal{T}$ может быть бесконечным, однако исследовать аппроксимируемость соответствующего древесного произведения удается лишь в предположении, что граф групп $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ обладает свойством (†).

Теорема 6. *Пусть в дереве $\mathcal{T}$ степень каждой вершины конечна, граф групп $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ удовлетворяет условию (†), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и выполняется условие $(\bar{\eta})$. Пусть также*

1) *для любого ребра $\{v, w\} \in \mathcal{E}$ группы $G_v/H_{\{v,w\}}$ и $G_w/H_{\{v,w\}}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы;*

2) *для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа G_v $\mathcal{C}$-аппроксимируема и $\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппе K_v.*

Тогда группа $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой.

Теорема 7. *Пусть граф групп $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ удовлетворяет условию (†), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и выполняется условие $(\bar{\eta})$. Пусть также для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группы G_v и G_v/K_v $\mathcal{C}$-аппроксимируемы и группа G_v $\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппе K_v. Тогда группа $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой.*

Отметим, что в теореме 7 дерево $\mathcal{T}$ может быть каким угодно. Ценой такой свободы служит условие $\mathcal{C}$-аппроксимируемости групп G_v/K_v $(v \in \mathcal{V})$, о необходимости которого для $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ ничего не известно. Сформулируем теперь ряд следствий приведенных результатов.

Следствие 1. *Пусть все реберные подгруппы графа групп $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ конечны, $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если дерево $\mathcal{T}$ конечно и граф групп $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ удовлетворяет условию (‡), то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathcal{C}$ для каждого ребра $\{v, w\} \in \mathcal{E}$ и $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}$.*

2. *Если в дереве $\mathcal{T}$ степень каждой вершины конечна и граф групп $\mathcal{G}(\mathcal{T})$ удовлетворяет условию (†), то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\mathcal{T}))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathcal{C}$ для каждого ребра $\{v, w\} \in \mathcal{E}$.*

Говорят (см., например, [43]), что группа имеет *конечный ранг Гирша — Зайцева*, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой.

Следствие 2. *Пусть каждая реберная подгруппа графа групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ имеет конечный ранг Гирша — Зайцева, $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и все группы G_v $(v \in \mathscr{V})$ аппроксимируются $\mathscr{C}$-группами без кручения. Тогда группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, если справедливо хотя бы одно из следующих утверждений*:

1) *дерево $\mathscr{T}$ конечно, граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (‡) и выполняются условия (η), (λ);*

2) *в дереве $\mathscr{T}$ степень каждой вершины конечна, граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (†) и выполняется условие (η).*

Если $\mathscr{C}$ — класс групп, состоящий из периодических групп, то через $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathscr{C}$. Подгруппу Y группы X назовем *$\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированной* в этой группе, если для любого элемента $x \in X$ и для любого простого числа $q \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Будем говорить также, что группа X *не имеет $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения*, если ее единичная подгруппа $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована. Очевидно, что если множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ содержит все простые числа, то каждая подгруппа оказывается $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированной.

Следуя [39], будем говорить, что

– абелева группа *$\mathscr{C}$-ограничена*, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая числу из множества $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$, имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой группы из класса $\mathscr{C}$;

– нильпотентная группа *$\mathscr{C}$-ограничена*, если она обладает конечным центральным рядом с $\mathscr{C}$-ограниченными абелевыми факторами.

Отметим, что если класс $\mathscr{C}$ корневой, то каждая конечно порожденная абелева группа оказывается $\mathscr{C}$-ограниченной абелевой и потому все конечно порожденные нильпотентные группы — $\mathscr{C}$-ограниченные нильпотентные.

Следствие 3. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп, все группы G_v $(v \in \mathscr{V})$ являются $\mathscr{C}$-ограниченными нильпотентными и не имеют $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения. Тогда группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, если справедливо хотя бы одно из следующих утверждений*:

1) *дерево $\mathscr{T}$ конечно, граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (‡), выполняются условия (η), (λ) и для любого ребра $\{v,w\} \in \mathscr{E}$ подгруппа $H_{\{v,w\}}$ $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группах G_v и G_w;*

2) *в дереве $\mathscr{T}$ степень каждой вершины конечна, граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (†), выполняется условие (η) и для любого ребра $\{v,w\} \in \mathscr{E}$ подгруппа $H_{\{v,w\}}$ $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группах G_v и G_w;*

3) *граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (†), выполняется условие (η) и для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ подгруппа K_v $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе G_v.*

В заключение данного параграфа приведем примеры, показывающие, что условия конечности дерева в теореме 5 и утверждениях 1 следствий 1–3 существенны.

Пример 2. Пусть $\mathscr{C}$ — класс всех разрешимых групп и $\mathscr{T}$ — бесконечная (в одну сторону) цепь с множеством вершин $\mathscr{V} = \{v_n \mid n \geqslant 0\}$ и множеством ребер $\mathscr{E} = \{\{v_n, v_{n+1}\} \mid n \geqslant 0\}$. Сопоставим каждой вершине v_n $(n \geqslant 0)$ группу $G_{v_n} = UT_{2^{n+1}}(\mathbb{Q})$ — верхнюю унитреугольную группу матриц порядка 2^{n+1} над полем рациональных чисел, а каждому ребру $\{v_n, v_{n+1}\}$ $(n \geqslant 0)$ — циклические подгруппы $H_{v_n v_{n+1}}$ и $H_{v_{n+1} v_n}$ с порождающими z_n и z_{n+1} соответственно, где $z_k \in G_{v_k}$ $(k \geqslant 0)$ — матрица с единицами на главной диагонали и в верхнем правом углу и нулями на всех остальных местах. Будем считать также, что изоморфизмы между реберными подгруппами переводят их порождающие друг в друга. Тогда $L_u = K_u = H_{\{u,w\}} = K_w = L_w$ для любого ребра $\{u, w\} \in \mathscr{E}$.

Хорошо известно (см., например, [44, § 3, формулы (2), (12)]), что G_{v_n} — разрешимая группа ступени n, ее центр совпадает с подгруппой $UT_{2^{n+1}}^{2^{n+1}-1}(\mathbb{Q})$, а последний нетривиальный член ряда коммутантов — с подгруппой $UT_{2^{n+1}}^{2^n}(\mathbb{Q})$, где $UT_{2^{n+1}}^{k}(\mathbb{Q})$ — множество матриц с $k-1$ нулевыми диагоналями выше главной. Поэтому группа G_{v_n} $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе $K_{v_n} = L$, элемент z_n лежит в ее центре и для любого ребра $\{u, w\} \in \mathscr{E}$ справедливы соотношения $G_u/H_{\{u,w\}}$, $G_w/H_{\{u,w\}} \in \mathscr{C}$ и $\mathfrak{H}_{\{u,w\}} = \mathfrak{L} = 1$. Из [44, § 4, формула (6)] вытекает также, что группа G_{v_n} не имеет кручения. Стало быть, граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5 и утверждения 1 следствия 2, за исключением конечности дерева $\mathscr{T}$. Покажем, что группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$, тем не менее, не является $\mathscr{C}$-аппроксимируемой.

В самом деле, пусть σ — гомоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ на некоторую $\mathscr{C}$-группу X и m — ступень разрешимости X. Так как группа $G_{v_{m+1}}$ имеет ступень разрешимости $m+1$ и элемент z_{m+1} лежит в последнем нетривиальном члене ряда коммутантов указанной группы, то $z_{m+1}\sigma = 1$. Поскольку $z_0 = z_{m+1}$, отсюда следует, что $z_0\sigma = 1$. Таким образом, элемент z_0 переходит в единицу под действием любого гомоморфизма группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ на $\mathscr{C}$-группу.

Доказать существенность условия конечности дерева в следствиях 1 и 3 можно было бы аналогичным образом, рассматривая матрицы над конечным полем. Однако существует гораздо более простой

Пример 3. Пусть p — простое число, $\mathscr{C}$ — класс конечных p-групп и $\mathscr{T}$ — цепь из предыдущего примера. Для каждого $n \geqslant 0$ сопоставим вершине v_n циклическую группу G_{v_n} порядка p^{n+1} с порождающим c_n, а ребру $\{v_n, v_{n+1}\}$ — подгруппы $H_{v_n v_{n+1}}$ и $H_{v_{n+1} v_n}$ с порождающими $c_n^{p^n}$ и $c_{n+1}^{p^{n+1}}$ соответственно, переходящими друг в друга под действием объединяющих указанные подгруппы изоморфизмов. Тогда для любого ребра $\{u, w\} \in \mathscr{E}$ имеют место соотношения $G_u, G_w \in \mathscr{C}$, $G_{v_0} = L_u = K_u = H_{\{u,w\}} = K_w = L_w$, $\mathfrak{H}_{\{u,w\}} = \mathfrak{L} = 1$ и потому граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет всем условиям утверждений 1 следствий 1 и 3, кроме конечности дерева $\mathscr{T}$. Однако если σ — гомоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ на $\mathscr{C}$-группу F и порядок F равен p^k для некоторого $k \geqslant 0$, то $c_0\sigma = c_k^{p^k}\sigma = 1$. Таким образом, группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ не является $\mathscr{C}$-аппроксимируемой.

§ 4. Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп и X — некоторая группа. Следуя [36], будем говорить, что подгруппа Y группы X *$\mathscr{C}$-отделима* в этой группе, если для каждого элемента $x \in X \setminus Y$ существует гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathscr{C}$, удовлетворяющий условию $x\sigma \notin Y\sigma$. Отметим, что подгруппа Y $\mathscr{C}$-отделима в группе X тогда и только тогда, когда $\bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(X)} YN = Y$. В частности, $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы X равносильна соотношению $\bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(X)} N = 1$. Эти соображения будут использоваться далее без пояснений.

Предложение 4.1 [42, предложение 3]. *Если $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, X — некоторая группа и Y — ее нормальная* *подгруппа, то последняя $\mathscr{C}$-отделима в группе X тогда и только тогда, когда фактор-группа X/Y $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Предложение 4.2 [42, предложение 4]. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, X — некоторая группа, Y — ее подгруппа и $Z \in \mathscr{C}^*(X)$. Тогда $Y \cap Z \in \mathscr{C}^*(Y)$ и, если группа X $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то подгруппа Y также является $\mathscr{C}$-аппроксимируемой.*

Предложение 4.3 [42, предложение 2]. *Если $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, то для любой группы X справедливы следующие утверждения.*

1. *Пересечение конечного числа подгрупп из семейства $\mathscr{C}^*(X)$ снова является подгруппой из данного семейства.*

2. *Если группа X $\mathscr{C}$-аппроксимируема и Y — ее конечная подгруппа, то существует подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$, удовлетворяющая условию $Y \cap N = 1$.*

Предложение 4.4 [32, предложение 4]. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, X — некоторая группа и Y — ее нормальная подгруппа. Если существует гомоморфизм группы X на $\mathscr{C}$-группу, действующий инъективно на подгруппе Y, то $\mathrm{Aut}_X(Y) \in \mathscr{C}$.*

Если X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа и $x \in X$, то через $\widehat{x}|_Y$ будем обозначать ограничение на подгруппу Y внутреннего автоморфизма группы X, производимого элементом x. Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Предложение 4.5. *Пусть X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа и σ — гомоморфизм группы X. Тогда отображение $\overline{\sigma}\colon \mathrm{Aut}_X(Y) \to \mathrm{Aut}_{X\sigma}(Y\sigma)$, действующее по правилу $\widehat{x}|_Y \mapsto \widehat{x\sigma}|_{Y\sigma}$ $(x \in X)$, корректно определено и является сюръективным гомоморфизмом.*

Предложение 4.6. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, X — некоторая группа и Y — ее подгруппа. Если группа X $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе Y, то для любой подгруппы $M \in \mathscr{C}^*(Y)$, нормальной в X, найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y = M$.*

Доказательство. Пусть подгруппа $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ нормальна в группе X. Так как последняя $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе Y, то существует подгруппа $Z \in \mathscr{C}^*(X)$, удовлетворяющая условию $Y \cap Z \leqslant M$. Положим $N = MZ$. Тогда подгруппа N нормальна в группе X и, как легко видеть, $N \cap Y = M$. Ввиду замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия фактор-групп из соотношений $X/N \cong (X/Z)/(N/Z)$ и $X/Z \in \mathscr{C}$ следует, что $X/N \in \mathscr{C}$. Стало быть, подгруппа N является искомой.

Предложение 4.7. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, X — некоторая группа и Y — нормальная подгруппа группы X. Если $\mathrm{Aut}_X(Y) \in \mathscr{C}$, то каждая подгруппа $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ содержит подгруппу $N \in \mathscr{C}^*(Y)$, нормальную в группе X.*

Доказательство. Зафиксируем некоторую подгруппу $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ и положим $N = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{Aut}_X(Y)} M\alpha$. Из определения группы $\mathrm{Aut}_X(Y)$ следует, что $N = \bigcap_{x \in X} x^{-1}Mx$ и, стало быть, подгруппа N нормальна в группе X. По теореме Ремака (см., например, [44, теорема 4.3.9]) фактор-группа Y/N вкладывается в декартово произведение групп $Y/M\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{Aut}_X(Y))$, каждая из которых изоморфна $\mathscr{C}$-группе Y/M. Из определения корневого класса и включения $\mathrm{Aut}_X(Y) \in \mathscr{C}$ вытекает, что указанное произведение принадлежит классу $\mathscr{C}$.

Значит, $Y/N \in \mathcal{C}$ ввиду замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп и N — искомая подгруппа.

Предложение 4.8. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и фактор-групп, X — некоторая группа, Y и Z — нормальные подгруппы группы X и $Y \cap Z = 1$. Если группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема и $\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппе YZ, то из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости фактор-группы X/YZ следует $\mathcal{C}$-аппроксимируемость фактор-групп X/Y и X/Z.*

Доказательство. Ввиду симметричности ограничений, наложенных на подгруппы Y и Z, достаточно проверить только $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы X/Y. Выберем произвольный элемент $xY \in (X/Y)\backslash\{1\}$ и укажем подгруппу $N/Y \in \mathcal{C}^*(X/Y)$ такую, что $xY \notin N/Y$.

Если $x \notin YZ$, то $xYZ \neq 1$ и ввиду $\mathcal{C}$-аппроксимируемости фактор-группы X/YZ существует подгруппа $N/YZ \in \mathcal{C}^*(X/YZ)$, не содержащая элемента xYZ. Легко видеть, что тогда подгруппа N/Y оказывается искомой.

Если $x \in YZ$ и $x = yz$ для некоторых элементов $y \in Y$, $z \in Z$, то $z \neq 1$, поскольку $xY \neq 1$ и, следовательно, $x \notin Y$. Воспользуемся $\mathcal{C}$-аппроксимируемостью группы X и выберем подгруппу $M \in \mathcal{C}^*(X)$, не содержащую элемента z. Тогда $M \cap Z \in \mathcal{C}^*(Z)$ в силу предложения 4.2 и $x \notin Y(M \cap Z)$, поскольку $Y \cap Z = 1$ и из равенства $x = y_1z_1$, где $y_1 \in Y$, $z_1 \in M \cap Z$, следовало бы, что $z = z_1 \in M$ вопреки выбору подгруппы M. Так как подгруппы $M\cap Z$ и $Y(M\cap Z)$ нормальны в группе X и $YZ/Y(M \cap Z) \cong Z/(M \cap Z)(Y \cap Z) = Z/M \cap Z \in \mathcal{C}$, то из $\mathcal{C}$-квазирегулярности группы X по подгруппе YZ и предложения 4.6 вытекает существование подгруппы $N \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющей равенству $N \cap YZ = Y(M \cap Z)$. Отсюда $N/Y \in \mathcal{C}^*(X/Y)$ и $x \in YZ \setminus (N \cap YZ)$, а значит, $x \notin N$ и $xY \notin N/Y$. Стало быть, подгруппа N является искомой.

Предложение 4.9. *Если $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, X — $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа и Y — ее нормальная подгруппа, то группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$ также является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой.*

Доказательство. Легко видеть, что $\mathrm{Aut}_X(Y) \cong X/Z$, где Z — централизатор подгруппы Y в группе X. Ввиду предложения 4.1 для завершения доказательства достаточно показать, что если $Z \neq X$, то подгруппа Z $\mathcal{C}$-отделима в X.

Пусть $x \in X \setminus Z$. Тогда найдется элемент $y \in Y$, удовлетворяющий условию $[x, y] \neq 1$. Поскольку группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема, существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $[x, y] \notin N$. Отсюда $x \notin ZN$ и, следовательно, подгруппа Z $\mathcal{C}$-отделима.

§ 5. Доказательства теорем 2 и 3

Всюду далее, если σ — некоторый гомоморфизм, то через $\ker\sigma$ и $\mathrm{Im}\,\sigma$ будем обозначать его ядро и образ.

Пусть для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ в группе G_v зафиксирована некоторая нормальная подгруппа R_v. Будем называть семейство $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ *системой совместимых нормальных подгрупп в графе групп $\mathcal{G}(\mathcal{T})$*, если для любого ребра $\{v, w\} \in \mathcal{E}$ справедливо равенство $(R_v \cap H_{vw})\varphi_{vw} = R_w \cap H_{wv}$. Из указанного соотношения следует, что отображения $\overline{\varphi}_{vw}\colon H_{vw}R_v/R_v \to H_{wv}R_w/R_w$ и $\overline{\varphi}_{wv}\colon H_{wv}R_w/R_w \to H_{vw}R_v/R_v$, заданные правилами $(hR_v)\overline{\varphi}_{vw} = (h\varphi_{vw})R_w$ $(h \in H_{vw})$ и $(hR_w)\overline{\varphi}_{wv} = (h\varphi_{wv})R_v$ $(h \in H_{wv})$, корректно определены и являются взаимообратными изоморфизмами подгрупп $H_{vw}R_v/R_v$ и $H_{wv}R_w/R_w$.

Поэтому можно рассмотреть граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T})$, в котором вершинам сопоставлены группы G_v/R_v ($v \in \mathscr{V}$), а ребрам — подгруппы $H_{vw}R_v/R_v$, $H_{wv}R_w/R_w$ и изоморфизмы $\overline{\varphi}_{vw}$, $\overline{\varphi}_{wv}$ ($\{v,w\} \in \mathscr{E}$).

Легко видеть, что тождественное отображение образующих древесного произведения $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ в группу $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}))$ определяет сюръективный гомоморфизм $\rho_{\mathscr{R}}\colon \pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})) \to \pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}))$, ядро которого совпадает с нормальным замыканием множества $\bigcup_{v\in\mathscr{V}} R_v$ в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ и удовлетворяет соотношениям $\ker\rho_{\mathscr{R}} \cap G_v = R_v$ ($v \in \mathscr{V}$).

Предложение 5.1 [29, теорема 1]. *Если $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, все группы G_v ($v \in \mathscr{V}$) $\mathscr{C}$-аппроксимируемы и существует гомоморфизм древесного произведения $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, действующий инъективно на каждой подгруппе $H_{\{v,w\}}$ ($\{v,w\} \in \mathscr{E}$), то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Предложение 5.2 [12, предложение 2]. *Пусть дерево $\mathscr{T}$ конечно и N — нормальная подгруппа группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$, тривиально пересекающаяся с каждой подгруппой $H_{\{v,w\}}$ ($\{v,w\} \in \mathscr{E}$). Тогда подгруппа N раскладывается в свободное произведение семейства групп, каждая из которых свободна или изоморфна подгруппе $N \cap G_v$ для некоторой вершины $v \in \mathscr{V}$.*

Доказательство теоремы 2. Если выполняется утверждение 1 и группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ обладает гомоморфизмом σ на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективным на каждой подгруппе G_v ($v \in \mathscr{V}$), то она $\mathscr{C}$-аппроксимируема согласно предложению 5.1 и для любого ребра $\{v,w\} \in \mathscr{E}$ ограничение $\sigma_{\{v,w\}}$ гомоморфизма σ на подгруппу $P_{\{v,w\}}$ действует инъективно на подгруппе $H_{\{v,w\}}$. Ввиду замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп справедливо включение $\operatorname{Im}\sigma_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$ и потому $\mathfrak{H}_{\{v,w\}} = \operatorname{Aut}_{P_{\{v,w\}}}(H_{\{v,w\}}) \in \mathscr{C}$ в силу предложения 4.4. Таким образом, импликация $1 \Rightarrow 2$ имеет место.

Докажем импликацию $2 \Rightarrow 1$. Зафиксируем произвольную вершину $u \in \mathscr{V}$ и покажем, что $G_u \cap N_u = 1$ для некоторой подгруппы $N_u \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})))$.

Если $w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u)$, определим семейство подгрупп $\mathscr{R}(w) = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ следующим образом:

$$R_u = \prod_{v\in\mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u)\setminus\{w\}} H_{uv}, \quad R_w = \prod_{v\in\mathscr{N}_{\mathscr{T}}(w)\setminus\{u\}} H_{wv}, \quad R_v = G_v \ (v \notin \{u,w\}).$$

Так как граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (†), то $\mathscr{R}(w)$ является системой совместимых нормальных подгрупп в данном графе. Из определения указанной системы следует, что группа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(w)}(\mathscr{T}))$ совпадает с образом подгруппы $P_{\{u,w\}}$ относительно гомоморфизма $\rho_{\mathscr{R}(w)}$ и представляет собой обобщенное свободное произведение групп $G_u\rho_{\mathscr{R}(w)}$ и $G_w\rho_{\mathscr{R}(w)}$ с нормальной объединенной подгруппой $H_{\{u,w\}}\rho_{\mathscr{R}(w)}$.

Согласно предложению 4.5 группа $\operatorname{Aut}_{P_{\{u,w\}}\rho_{\mathscr{R}(w)}}(H_{\{u,w\}}\rho_{\mathscr{R}(w)})$ служит гомоморфным образом группы $\mathfrak{H}_{\{u,w\}} = \operatorname{Aut}_{P_{\{u,w\}}}(H_{\{u,w\}})$. Так как $G_u, G_w, \mathfrak{H}_{\{u,w\}} \in \mathscr{C}$ и класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то в силу теоремы 1 группа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(w)}(\mathscr{T}))$ обладает гомоморфизмом на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективным на свободных множителях $G_u\rho_{\mathscr{R}(w)}$ и $G_w\rho_{\mathscr{R}(w)}$. Обозначим через $M_{\mathscr{R}(w)}$ ядро этого гомоморфизма и через M_w — прообраз $M_{\mathscr{R}(w)}$ относительно гомоморфизма $\rho_{\mathscr{R}(w)}$. Тогда $M_{\mathscr{R}(w)} \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(w)}(\mathscr{T})))$, $M_w \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})))$ и, поскольку $\ker\rho_{\mathscr{R}(w)} \cap G_u = R_u$, из соотношения $M_{\mathscr{R}(w)} \cap G_u\rho_{\mathscr{R}(w)} = 1$ следует, что $M_w \cap G_u = R_u$.

Таким образом, для каждой вершины $w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u)$ существует подгруппа $M_w \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})))$, удовлетворяющая равенству $M_w \cap G_u = \prod_{v\in\mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u)\setminus\{w\}} H_{uv}$.

Положим $N_u = \bigcap_{w\in\mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u)} M_w$. Тогда $N_u \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})))$ в силу предложения 4.3 и конечности множества $\mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u)$. Так как подгруппа $K_u = \prod_{v\in\mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u)} H_{uv}$ представляет собой прямое произведение своих сомножителей, то $N_u \cap G_u = 1$. Стало быть, N_u — искомая подгруппа.

Положим $N = \bigcap_{v\in\mathscr{V}} N_v$. Тогда $N \cap G_v = 1$ для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ и $N \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})))$ ввиду уже упоминавшегося предложения 4.3 и конечности дерева $\mathscr{T}$. Поэтому естественный гомоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ на группу $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))/N$ является искомым.

Доказательство теоремы 3. Если выполняется утверждение 1 и группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ обладает гомоморфизмом на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективным на каждой подгруппе G_v $(v \in \mathscr{V})$, то указанный гомоморфизм инъективен и на подгруппе L. Поэтому включение $\mathrm{Aut}_{\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))}(L) \in \mathscr{C}$ вытекает из предложения 4.4 и замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп. Соотношения $\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$ $(\{v,w\} \in \mathscr{E})$ и $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ проверяются так же, как и при доказательстве теоремы 2. Следовательно, импликация $1 \Rightarrow 2$ имеет место. Докажем импликацию $2 \Rightarrow 1$.

Очевидно, что семейство подгрупп $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$, в котором $R_v = L$ для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$, представляет собой систему совместимых нормальных подгрупп в графе групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$. Поэтому можно рассмотреть древесное произведение $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}))$. Легко видеть, что граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (†). Согласно предложению 4.5 для каждого ребра $\{v,w\} \in \mathscr{E}$ группа $\mathrm{Aut}_{P_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}}}(H_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}})$ является гомоморфным образом группы $\mathfrak{H}_{\{v,w\}}$. Отсюда, из соотношений $G_v \in \mathscr{C}$ $(v \in \mathscr{V})$ и $\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$ $(\{v,w\} \in \mathscr{E})$, замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия фактор-групп и теоремы 2 вытекает, что древесное произведение $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}))$ обладает гомоморфизмом σ на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективным на всех вершинных группах. В силу предложения 5.2 ядро этого гомоморфизма является свободной группой.

Поскольку подгруппа L нормальна в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$, имеет место равенство $\ker\rho_{\mathscr{R}} = L$. Следовательно, подгруппа $N = \ker\rho_{\mathscr{R}}\sigma$ представляет собой расширение группы L при помощи свободной группы. Хорошо известно, что такое расширение расщепляемо, т. е. группа N обладает свободной подгруппой F, удовлетворяющей соотношениям $N = LF$ и $L \cap F = 1$.

Ввиду нормальности подгруппы L в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ определен гомоморфизм $\xi\colon \pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})) \to \mathrm{Aut}\,L$, переводящий элемент $x \in \pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ в автоморфизм $\widehat{x}|_L$. Очевидно, что ядро этого гомоморфизма совпадает с централизатором Z подгруппы L в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$. Отсюда, из соотношений

$$N = LF, \quad L \cap F = 1, \quad FZ/Z \leqslant \pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))/Z = \mathrm{Im}\,\xi = \mathrm{Aut}_{\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))}(L) \in \mathscr{C}$$

и замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп и расширений вытекает, что подгруппа $M = Z \cap F$ нормальна в группе N,

$$F/M \cong FZ/Z \in \mathscr{C}, \quad LM/M \cong L/L \cap M \cong L \in \mathscr{C},$$
$$N/LM = LF/LM \cong F/M(L \cap F) = F/M \in \mathscr{C}$$

и фактор-группа N/M, будучи расширением своей подгруппы LM/M при помощи группы, изоморфной N/LM, содержится в классе $\mathscr{C}$. Из определения гомоморфизма σ следует также, что $N \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})))$. Поэтому, применяя условие Грюнберга из определения корневого класса к субнормальному ряду $1 \leqslant M \leqslant N \leqslant \pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$, можно найти подгруппу $Q \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})))$, лежащую в M.

Пусть $v \in \mathscr{V}$ — произвольная вершина. Так как гомоморфизм σ действует инъективно на подгруппе $G_v\rho_{\mathscr{R}}$, то $N \cap G_v = \ker \rho_{\mathscr{R}} \cap G_v = L$ и из включений $Q \leqslant M \leqslant F \leqslant N$ следует, что $Q \cap G_v \leqslant F \cap (N \cap G_v) = F \cap L = 1$. Значит, естественный гомоморфизм $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})) \to \pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))/Q$ является искомым отображением.

§ 6. Доказательства теорем 4–6

Если $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ — система совместимых нормальных подгрупп в графе $\mathscr{G}(\mathscr{T})$, $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп и существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, действующий инъективно на каждой вершинной группе G_v/R_v $(v \in \mathscr{V})$, то систему $\mathscr{R}$ будем называть *$\mathscr{C}$-допустимой.* Следующее утверждение получается объединением теорем 1 и 3 из [27].

Предложение 6.1. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп и для любых $u \in \mathscr{V}$, $N \in \mathscr{C}^*(G_u)$ существует $\mathscr{C}$-допустимая система $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ совместимых нормальных подгрупп в графе групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ такая, что $R_u \leqslant N$. Если все группы G_v $(v \in \mathscr{V})$ $\mathscr{C}$-аппроксимируемы и для любого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ подгруппа $H_{\{v,w\}}$ $\mathscr{C}$-отделима в группах G_v и G_w, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Предложение 6.2. *Пусть граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию (‡) и $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ — система совместимых нормальных подгрупп в графе $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ и выполняются условия (η) и (λ). Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ хотя бы одна из подгрупп*

$$\overline{\mathfrak{F}}_{vw} = \operatorname{Aut}_{G_v\rho_{\mathscr{R}}}(H_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}}), \quad \overline{\mathfrak{F}}_{wv} = \operatorname{Aut}_{G_w\rho_{\mathscr{R}}}(H_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}})$$

нормальна в группе $\overline{\mathfrak{H}}_{\{v,w\}} = \operatorname{Aut}_{P_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}}}(H_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}})$ или $\overline{\mathfrak{H}}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$.

2. *Все (кроме, быть может, одной) подгруппы $\overline{\mathfrak{M}}_v = \operatorname{Aut}_{G_v\rho_{\mathscr{R}}}(L\rho_{\mathscr{R}})$ $(v \in \mathscr{V})$ нормальны в группе $\overline{\mathfrak{L}} = \operatorname{Aut}_{\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}))}(L\rho_{\mathscr{R}})$ или $\overline{\mathfrak{L}} \in \mathscr{C}$.*

3. *Пусть существует конечное поддерево $\mathscr{T}'$ дерева $\mathscr{T}$ с множеством вершин $\mathscr{V}'$ и множеством ребер $\mathscr{E}'$ такое, что* (i) *для любой вершины $v \in \mathscr{V}'$ фактор-группа $K_v\rho_{\mathscr{R}}/L\rho_{\mathscr{R}}$ представляет собой прямое произведение групп $L\rho_{\mathscr{R}}$ $(w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}'}(v))$;* (ii) *$G_v\rho_{\mathscr{R}} \in \mathscr{C}$ для всех $v \in \mathscr{V}'$ и $G_v\rho_{\mathscr{R}} = 1$ для всех $v \notin \mathscr{V}'$. Тогда система $\mathscr{R}$ $\mathscr{C}$-допустима.*

Доказательство. В силу предложения 4.5 для любого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ гомоморфизм, отображающий группу $\mathfrak{H}_{\{v,w\}}$ на группу $\overline{\mathfrak{H}}_{\{v,w\}}$, переводит подгруппы $\mathfrak{F}_{vw}$ и $\mathfrak{F}_{wv}$ на подгруппы $\overline{\mathfrak{F}}_{vw}$ и $\overline{\mathfrak{F}}_{wv}$ соответственно. Точно так же для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ гомоморфизм, отображающий группу $\mathfrak{L}$ на группу $\overline{\mathfrak{L}}$, переводит подгруппу $\mathfrak{M}_v$ на подгруппу $\overline{\mathfrak{M}}_v$. Поэтому утверждения 1 и 2 вытекают из условий (η), (λ) и замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия фактор-групп. Докажем утверждение 3.

Из условия (ii) следует, что $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T})) = \pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}'))$. Пусть $\{v, w\} \in \mathscr{E}'$. Если хотя бы одна из подгрупп $\overline{\mathfrak{F}}_{vw}$, $\overline{\mathfrak{F}}_{wv}$ (скажем, $\overline{\mathfrak{F}}_{wv}$) нормальна в группе $\overline{\mathfrak{H}}_{\{v,w\}}$, то $\overline{\mathfrak{H}}_{\{v,w\}} = \overline{\mathfrak{F}}_{vw}\overline{\mathfrak{F}}_{wv}$ и $\overline{\mathfrak{H}}_{\{v,w\}}/\overline{\mathfrak{F}}_{wv} \cong \overline{\mathfrak{F}}_{vw}/\overline{\mathfrak{F}}_{vw} \cap \overline{\mathfrak{F}}_{wv}$. Так как согласно условию (ii) $G_v\rho_{\mathscr{R}} \in \mathscr{C}$ и $G_w\rho_{\mathscr{R}} \in \mathscr{C}$, то по предложению 4.4 $\overline{\mathfrak{F}}_{vw} \in \mathscr{C}$ и $\overline{\mathfrak{F}}_{wv} \in \mathscr{C}$. Значит, $\overline{\mathfrak{H}}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$ ввиду замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия фактор-групп и расширений. Аналогичным образом доказывается, что если все (кроме, быть может, одной) подгруппы $\overline{\mathfrak{M}}_v$ $(v \in \mathscr{V}')$ нормальны в группе $\overline{\mathfrak{L}}$, то последняя обладает конечным (ввиду конечности поддерева $\mathscr{T}'$) нормальным рядом, факторы которого служат гомоморфными образами указанных подгрупп и потому принадлежат классу $\mathscr{C}$. Таким образом, $\overline{\mathfrak{L}} \in \mathscr{C}$. Из условия (i) легко следует, что граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}')$ удовлетворяет условию (‡). Поэтому в силу теоремы 3 группа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}'))$ обладает гомоморфизмом на $\mathscr{C}$-группу, действующим инъективно на всех вершинных группах. Поскольку $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T})) = \pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}'))$, отсюда вытекает, что система $\mathscr{R}$ $\mathscr{C}$-допустима.

Доказательство теоремы 4. $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ при выполнении утверждения 1 и импликация $1 \Rightarrow 2$ проверяются так же, как и в теореме 3. $\mathscr{C}$-аппроксимируемость всех групп G_v ($v \in \mathscr{V}$) следует из $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ в силу предложения 4.2. Докажем импликацию $2 \Rightarrow 1$.

Для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ положим $R_v = \ker\sigma_v$. Поскольку $R_v \cap K_v = 1$ и $G_v/R_v \in \mathscr{C}$ для всех $v \in \mathscr{V}$, семейство $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ является системой совместимых нормальных подгрупп в графе групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ и граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}')$, где $\mathscr{T}' = \mathscr{T}$, удовлетворяет условиям (i) и (ii) из формулировки предложения 6.2. Поэтому согласно указанному предложению система $\mathscr{R}$ является $\mathscr{C}$-допустимой. Это означает, что древесное произведение $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}))$ обладает гомоморфизмом σ на $\mathscr{C}$-группу, действующим инъективно на всех вершинных группах $G_v\rho_{\mathscr{R}}$ ($v \in \mathscr{V}$). Понятно, что композиция $\rho_{\mathscr{R}}\sigma$ является искомым отображением.

Доказательство теоремы 5. Согласно предложению 4.1 для любого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируемость фактор-групп $G_v/H_{\{v,w\}}$ и $G_w/H_{\{v,w\}}$ равносильна $\mathscr{C}$-отделимости подгруппы $H_{\{v,w\}}$ в группах G_v и G_w. Зафиксировав некоторые вершину $u \in \mathscr{V}$ и подгруппу $N \in \mathscr{C}^*(G_u)$, покажем, что существует $\mathscr{C}$-допустимая система $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ совместимых нормальных подгрупп в графе групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ такая, что $R_u \leqslant N$. Тогда $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ будет следовать из предложения 6.1.

Так как по предложению 4.2 $N \cap L \in \mathscr{C}^*(L)$, то ввиду условия $(\bar{\lambda})$ и предложения 4.7 найдется подгруппа $M \in \mathscr{C}^*(L)$, лежащая в $N \cap L$ и нормальная в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$. Для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ из $\mathscr{C}$-квазирегулярности группы G_v по подгруппе L и предложения 4.6 вытекает существование подгруппы $S_v \in \mathscr{C}^*(G_v)$, удовлетворяющей условию $S_v \cap L = M$. Поскольку $S_u \cap N \in \mathscr{C}^*(G_u)$ согласно предложению 4.3 и $(S_u \cap N) \cap L = M \cap N = M$, без потери общности (заменяя S_u на $S_u \cap N$) можно считать, что $S_u \leqslant N$. Ввиду предложений 4.2 и 4.3 для любого ребра $\{w_1, w_2\} \in \mathscr{E}$ справедливы включения

$$S_{w_1} \cap H_{\{w_1,w_2\}} \in \mathscr{C}^*(H_{\{w_1,w_2\}}), \quad S_{w_2} \cap H_{\{w_1,w_2\}} \in \mathscr{C}^*(H_{\{w_1,w_2\}}),$$
$$(S_{w_1} \cap H_{\{w_1,w_2\}}) \cap (S_{w_2} \cap H_{\{w_1,w_2\}}) \in \mathscr{C}^*(H_{\{w_1,w_2\}}).$$

Поэтому из условия $(\bar{\eta})$ и предложения 4.7 следует существование подгруппы $Q_{\{w_1,w_2\}} \in \mathscr{C}^*(H_{\{w_1,w_2\}})$, лежащей в $S_{w_1} \cap H_{\{w_1,w_2\}} \cap S_{w_2}$ и нормальной в группе $P_{\{w_1,w_2\}}$. Поскольку $M \leqslant S_{w_1} \cap H_{\{w_1,w_2\}} \cap S_{w_2}$, подгруппа $MQ_{\{w_1,w_2\}}$ также содержится в пересечении $S_{w_1} \cap H_{\{w_1,w_2\}} \cap S_{w_2}$, нормальна в группе $P_{\{w_1,w_2\}}$ и ввиду замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия фактор-групп принадлежит семейству $\mathscr{C}^*(H_{\{w_1,w_2\}})$. Поэтому, заменяя при необходимости $Q_{\{w_1,w_2\}}$ на $MQ_{\{w_1,w_2\}}$, можно считать далее, что $M \leqslant Q_{\{w_1,w_2\}}$. Отсюда и из соотношений $M \leqslant L$, $Q_{\{w_1,w_2\}} \leqslant S_{w_1}$ и $S_{w_1} \cap L = M$ следует, что $Q_{\{w_1,w_2\}} \cap L = M$.

Зафиксируем произвольную вершину $v \in \mathscr{V}$ и положим $T_v = \prod_{w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v)} Q_{\{v,w\}}$. Тогда T_v — нормальная подгруппа группы G_v, лежащая в $S_v \cap K_v$. Покажем, что $T_v \in \mathscr{C}^*(K_v)$.

В самом деле, группа K_v/T_v является расширением своей подгруппы LT_v/T_v при помощи группы, изоморфной K_v/LT_v, которая, в свою очередь, изоморфна фактор-группе группы K_v/L по подгруппе T_vL/L. Так как $LT_v/T_v \cong L/L \cap T_v$ и $M \leqslant T_v \leqslant S_v$, то $M \leqslant L \cap T_v \leqslant L \cap S_v = M$ и $LT_v/T_v \cong L/M \in \mathscr{C}$. Согласно условию (‡) группа K_v/L раскладывается в прямое произведение групп $H_{\{v,w\}}/L$ $(w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v))$. Поскольку $T_vL/L = \prod_{w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v)} Q_{\{v,w\}}L/L$ и $Q_{\{v,w\}}L/L \leqslant H_{\{v,w\}}/L$ для каждой вершины $w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v)$, фактор-группа $(K_v/L)/(T_vL/L)$ изоморфна прямому произведению групп $(H_{\{v,w\}}/L)/(Q_{\{v,w\}}L/L)$ $(w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v))$. Отсюда, из соотношений

$$(H_{\{v,w\}}/L)/(Q_{\{v,w\}}L/L) \cong H_{\{v,w\}}/Q_{\{v,w\}}L \cong (H_{\{v,w\}}/Q_{\{v,w\}})/(Q_{\{v,w\}}L/Q_{\{v,w\}}),$$
$$H_{\{v,w\}}/Q_{\{v,w\}} \in \mathscr{C} \quad (w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v)),$$

конечности множества $\mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v)$ и замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия фактор-групп и расширений вытекает, что $K_v/T_v \in \mathscr{C}$, как и требовалось.

Пользуясь $\mathscr{C}$-квазирегулярностью группы G_v по подгруппе K_v и предложением 4.6, найдем подгруппу $R_v \in \mathscr{C}^*(G_v)$ такую, что $R_v \cap K_v = T_v$. Поскольку $R_v \cap S_v \in \mathscr{C}^*(G_v)$ по предложению 4.3 и $(R_v \cap S_v) \cap K_v = T_v \cap S_v = T_v$, без потери общности можно считать, что $R_v \leqslant S_v$. Из доказанного выше следует, что $T_vL/L \cap H_{\{v,w\}}/L = Q_{\{v,w\}}L/L$ для каждой вершины $w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v)$. Поэтому, если $x \in T_v \cap H_{\{v,w\}}$, то $x = yz$ для некоторых $y \in Q_{\{v,w\}}$, $z \in L$ и $z = y^{-1}x \in L \cap T_v \leqslant L \cap S_v = M \leqslant Q_{\{v,w\}}$, откуда $x \in Q_{\{v,w\}}$. Следовательно, $T_v \cap H_{\{v,w\}} = Q_{\{v,w\}}$ и $R_v \cap H_{\{v,w\}} = R_v \cap K_v \cap H_{\{v,w\}} = T_v \cap H_{\{v,w\}} = Q_{\{v,w\}}$. Таким образом, построенное семейство $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ является системой совместимых нормальных подгрупп в графе групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$, причем $R_u \leqslant S_u \leqslant N$ и $G_v\rho_{\mathscr{R}} \in \mathscr{C}$ для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$. Остается показать, что граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}')$, где $\mathscr{T}' = \mathscr{T}$, удовлетворяет условию (i) из формулировки предложения 6.2. Тогда из данного предложения будет следовать $\mathscr{C}$-допустимость системы $\mathscr{R}$.

Пусть $v \in \mathscr{V}$ и в каждой подгруппе $H_{\{v,w\}}$ $(w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v))$ выбран некоторый элемент $h_{\{v,w\}}$. Если $\prod_{w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v)} h_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}} \equiv 1 \pmod{L\rho_{\mathscr{R}}}$, то для подходящих элементов $z \in L$ и $y_{\{v,w\}} \in Q_{\{v,w\}}$ $(w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v))$ имеют место соотношения

$$z^{-1} \prod_{w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v)} h_{\{v,w\}} \in \ker \rho_{\mathscr{R}} \cap K_v = \ker \rho_{\mathscr{R}} \cap G_v \cap K_v = R_v \cap K_v = T_v,$$

$$\prod_{w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v)} h_{\{v,w\}} \equiv \prod_{w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v)} y_{\{v,w\}} \pmod{L}.$$

Согласно условию (‡) фактор-группа K_v/L раскладывается в прямое произведение групп $H_{\{v,w\}}/L$ $(w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v))$. Поэтому для каждой вершины $w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v)$ из включений $Q_{\{v,w\}} \leqslant H_{\{v,w\}}$ и $Q_{\{v,w\}} \leqslant R_v \leqslant \ker \rho_{\mathscr{R}}$ вытекает, что

$$h_{\{v,w\}} \equiv y_{\{v,w\}} \pmod{L}, \quad h_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}} \equiv y_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}} = 1 \pmod{L\rho_{\mathscr{R}}}.$$

Таким образом, фактор-группа $K_v\rho_{\mathscr{R}}/L\rho_{\mathscr{R}}$ представляет собой прямое произведение подгрупп $H_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}}/L\rho_{\mathscr{R}}$ $(w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(v))$, что и требовалось.

Доказательство теоремы 6. Как и при доказательстве теоремы 5, достаточно показать, что для заданных вершины $u \in \mathscr{V}$ и подгруппы $N \in \mathscr{C}^*(G_u)$

существует $\mathscr{C}$-допустимая система $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ совместимых нормальных подгрупп в графе групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$, удовлетворяющая условию $R_u \leqslant N$.

Пусть $w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u)$. Так как $N \in \mathscr{C}^*(G_u)$, то $N \cap H_{\{u,w\}} \in \mathscr{C}^*(H_{\{u,w\}})$ по предложению 4.2. Поэтому в силу условия $(\bar{\eta})$ и предложения 4.7 подгруппа $N \cap H_{\{u,w\}}$ содержит некоторую подгруппу $M_{\{u,w\}} \in \mathscr{C}^*(H_{\{u,w\}})$, нормальную в группе $P_{\{u,w\}}$. Положим $Q_w = M_{\{u,w\}} \cdot \prod_{w' \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(w) \setminus \{u\}} H_{\{w,w'\}}$. Очевидно, что подгруппа Q_w нормальна в группе G_w и $K_w/Q_w \cong H_{\{u,w\}}/M_{\{u,w\}} \in \mathscr{C}$ в силу условия $(\dagger)$. Отсюда, из $\mathscr{C}$-квазирегулярности группы G_w по подгруппе K_w и предложения 4.6 следует существование подгруппы $R_w \in \mathscr{C}^*(G_w)$, удовлетворяющей соотношению $R_w \cap K_w = Q_w$.

Понятно, что подгруппа $Q_u = \prod_{w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u)} M_{\{u,w\}}$ содержится в N и нормальна в группе G_u, а фактор-группа K_u/Q_u ввиду условия $(\dagger)$ изоморфна прямому произведению $\mathscr{C}$-групп $H_{\{u,w\}}/M_{\{u,w\}}$ $(w \in \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u))$. Поскольку степень вершины u по условию конечна и класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия расширений, указанное произведение принадлежит данному классу. Как и выше, отсюда следует существование подгруппы $R_u \in \mathscr{C}^*(G_u)$, удовлетворяющей равенству $R_u \cap K_u = Q_u$. Так как $R_u \cap N \in \mathscr{C}^*(G_u)$ в силу предложения 4.3 и $(R_u \cap N) \cap K_u = Q_u \cap N = Q_u$, то без потери общности можно считать, что $R_u \leqslant N$.

Пусть, наконец, $R_v = G_v$ для каждой вершины $v \notin \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u) \cup \{u\}$. Легко видеть, что определенное таким образом семейство $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ является системой совместимых нормальных подгрупп в графе групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ и граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\mathscr{T}')$, где $\mathscr{T}'$ — (конечное) поддерево дерева $\mathscr{T}$ с множеством вершин $\mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u) \cup \{u\}$, удовлетворяет условию (i) из формулировки предложения 6.2. Из соотношения $L = 1$ следует также, что для группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ выполнено условие (λ). Поэтому в силу предложения 6.2 система $\mathscr{R}$ $\mathscr{C}$-допустима.

§ 7. Доказательство теоремы 7

Пусть P — обобщенное свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Легко видеть, что любой элемент $x \in P$ может быть записан в виде произведения $x_1 x_2 \ldots x_n$, где $n \geqslant 1$, $x_i \in A \cup B$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и, если $n \geqslant 2$, то никакие два соседних множителя x_i, x_{i+1} не лежат одновременно в A или B. Такое произведение называется *несократимой записью* элемента x. Известно (см., например, [45, гл. IV, теорема 2.6]), что если элемент обладает несократимой записью неединичной длины, то он отличен от единицы. Отсюда легко следует, что хотя один и тот же элемент может иметь несколько несократимых записей, число сомножителей во всех них одинаково; оно называется *длиной* данного элемента.

Если граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию $(\dagger)$ и $\mathscr{T}'$ — некоторое поддерево дерева $\mathscr{T}$ с множеством вершин $\mathscr{V}'$ и множеством ребер $\mathscr{E}'$, то через $\mathscr{R}(\mathscr{T}')$ будем обозначать семейство подгрупп $\{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$, элементы которого определяются следующим образом:

$$R_v = \begin{cases} G_v, & \text{если } v \notin \mathscr{V}'; \\ \prod_{\{v,w\} \notin \mathscr{E}'} H_{vw}, & \text{если } v \in \mathscr{V}'. \end{cases}$$

Легко видеть, что указанное семейство представляет собой систему совместимых нормальных подгрупп в графе групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$.

Предложение 7.1. *Пусть граф групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ удовлетворяет условию $(\dagger)$. Тогда для любого элемента $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})) \setminus \{1\}$ и для любого ребра $\{w_1, w_{-1}\} \in \mathscr{E}$*

существует конечное поддерево $\mathscr{T}'$ *дерева* $\mathscr{T}$ *такое, что* $g\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')} \neq 1$ *и, если* $g \notin H_{\{w_1,w_{-1}\}}$, *то* $g\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')} \notin H_{\{w_1,w_{-1}\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$.

Доказательство. Каждый элемент $x \in \pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ может быть записан в виде произведения порождающих конечного числа вершинных групп и потому принадлежит подгруппе $\pi_1(\mathscr{G}(\widetilde{\mathscr{T}}))$, где $\widetilde{\mathscr{T}}$ — некоторое конечное поддерево дерева $\mathscr{T}$. Среди всех таких поддеревьев найдется хотя бы одно, имеющее наименьшее число вершин. Обозначим данное число через $\mu(x)$. Зафиксируем элемент $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})) \setminus \{1\}$ и ребро $\{w_1, w_{-1}\} \in \mathscr{E}$ и проведем доказательство индукцией по $\mu(g)$.

Пусть $\mu(g) = 1$. Тогда $g \in G_u$ для некоторой вершины $u \in \mathscr{V}$.

Если $g \notin K_u$, то искомым является поддерево $\mathscr{T}'$, состоящее из одной вершины u. В самом деле, из определения системы $\mathscr{R}(\mathscr{T}')$ следует, что гомоморфизм $\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$ продолжает естественный гомоморфизм $G_u \to G_u/K_u$ и переводит все подгруппы G_v $(v \in \mathscr{V} \setminus \{u\})$ в единицу. Поэтому $H_{\{w_1,w_{-1}\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')} = 1$ и $g\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')} \neq 1$.

Если $g \in K_u$, то $g \in \prod_{w\in\mathscr{W}} H_{\{u,w\}}$ для некоторого конечного подмножества $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{N}_{\mathscr{T}}(u)$. Положим

$$\mathscr{V}' = \begin{cases} \mathscr{W}, & \text{если } w_1 \neq u \neq w_{-1}; \\ \mathscr{W} \cup \{w_\varepsilon\}, & \text{если } w_{-\varepsilon} = u \quad (\varepsilon = \pm 1); \end{cases}$$

и обозначим через $\mathscr{T}'$ поддерево дерева $\mathscr{T}$ с множеством вершин $\mathscr{V}' \cup \{u\}$ и множеством ребер $\mathscr{E}' = \{\{u,v\} \mid v \in \mathscr{V}'\}$. Тогда гомоморфизм $\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$ действует инъективно на подгруппе $S_u = \prod_{v\in\mathscr{V}'} H_{\{u,v\}}$ и переводит все подгруппы $H_{\{v,w\}}$ $(\{v,w\} \notin \mathscr{E}')$ в единицу. Так как $g \in S_u$, $\{w_1, w_{-1}\} \notin \mathscr{E}'$, если $w_1 \neq u \neq w_{-1}$, и $H_{\{w_1,w_{-1}\}} \leqslant S_u$ в противном случае, то $g\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')} \neq 1$ и $g\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')} \notin H_{\{w_1,w_{-1}\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$, если $g \notin H_{\{w_1,w_{-1}\}}$.

Тем самым база индукции доказана. Пусть теперь $\mu(g) > 1$, $\widetilde{\mathscr{T}}$ — конечное поддерево дерева $\mathscr{T}$ с $\mu(g)$ вершинами такое, что $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\widetilde{\mathscr{T}}))$, и $\{u_1, u_{-1}\}$ — некоторое ребро дерева $\widetilde{\mathscr{T}}$.

При удалении ребра $\{u_1, u_{-1}\}$ из дерева $\mathscr{T}$ последнее распадается на две компоненты связности: $\mathscr{T}_{u_1}$ (содержащую вершину u_1) и $\mathscr{T}_{u_{-1}}$ (содержащую вершину u_{-1}). Очевидно, что группа $\pi_1(\mathscr{G}(\widetilde{\mathscr{T}}))$ представляет собой обобщенное свободное произведение групп $\pi_1(\mathscr{G}(\widetilde{\mathscr{T}} \cap \mathscr{T}_{u_1}))$ и $\pi_1(\mathscr{G}(\widetilde{\mathscr{T}} \cap \mathscr{T}_{u_{-1}}))$ с объединенной подгруппой $H_{\{u_1,u_{-1}\}}$. Если длина элемента g в этом свободном произведении равна 1, то $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\widetilde{\mathscr{T}} \cap \mathscr{T}_{u_\varepsilon}))$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, что невозможно, поскольку число вершин в дереве $\widetilde{\mathscr{T}} \cap \mathscr{T}_{u_\varepsilon}$ меньше $\mu(g)$. Стало быть, элемент g имеет неединичную длину и потому может быть записан в виде $g = g_1 g_2 \ldots g_n$, где $n \geqslant 2$, $g_i \in \pi_1(\mathscr{G}(\widetilde{\mathscr{T}} \cap \mathscr{T}_{u_1})) \cup \pi_1(\mathscr{G}(\widetilde{\mathscr{T}} \cap \mathscr{T}_{u_{-1}}))$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и никакие два соседних множителя g_i, g_{i+1} не лежат одновременно в $\pi_1(\mathscr{G}(\widetilde{\mathscr{T}} \cap \mathscr{T}_{u_1}))$ или $\pi_1(\mathscr{G}(\widetilde{\mathscr{T}} \cap \mathscr{T}_{u_{-1}}))$. Последнее означает, в частности, что $g_i \notin H_{\{u_1,u_{-1}\}}$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Так как $g_i \in \pi_1(\mathscr{G}(\widetilde{\mathscr{T}} \cap \mathscr{T}_{u_\varepsilon}))$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$ и число вершин в дереве $\widetilde{\mathscr{T}} \cap \mathscr{T}_{u_\varepsilon}$ меньше $\mu(g)$, то $\mu(g_i) < \mu(g)$ и к графу групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$, элементу g_i и ребру $\{u_1, u_{-1}\}$ можно применить индуктивное предположение. Согласно последнему в дереве $\mathscr{T}$ найдется конечное поддерево $\mathscr{T}_i$, удовлетворяющее соотношению $g_i\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}_i)} \notin H_{\{u_1,u_{-1}\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}_i)}$. Пусть $\mathscr{T}'$ — конечное поддерево дерева $\mathscr{T}$, содержащее подграф $\bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{T}_i$. Из определения системы $\mathscr{R}(\mathscr{T}') = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$

следует, что при любом выборе числа $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ее подгруппы содержатся в соответствующих подгруппах системы $\mathscr{R}(\mathscr{T}_i)$. Поскольку ядро гомоморфизма $\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$ совпадает с нормальным замыканием множества $\bigcup_{v\in\mathscr{V}} R_v$, отсюда вытекает, что $g_i\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')} \notin H_{\{u_1,u_{-1}\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Значит, в группе $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}(\mathscr{T}))$, рассматриваемой как обобщенное свободное произведение групп $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}(\mathscr{T}_{u_1}))$ и $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}(\mathscr{T}_{u_{-1}}))$ с объединенной подгруппой $H_{\{u_1,u_{-1}\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$, элемент $g\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$ имеет несократимую запись неединичной длины и потому не принадлежит подгруппе $H_{\{w_1,w_{-1}\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$, лежащей в одном из свободных множителей. Таким образом, поддерево $\mathscr{T}'$ является искомым.

Доказательство теоремы 7. Пусть $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})) \setminus \{1\}$ — произвольный элемент. Согласно предложению 7.1 найдется конечное поддерево $\mathscr{T}'$ дерева $\mathscr{T}$ с множеством вершин $\mathscr{V}'$ и множеством ребер $\mathscr{E}'$ такое, что $g\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')} \neq 1$. Из определения системы $\mathscr{R}(\mathscr{T}') = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ вытекает, что $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}(\mathscr{T})) = \pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}(\mathscr{T}'))$ и граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}(\mathscr{T}')$ удовлетворяет условию (†). Покажем, что для группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}(\mathscr{T}'))$ выполнены условия теоремы 6 и, следовательно, отображение $\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$ можно продолжить до гомоморфизма на $\mathscr{C}$-группу, переводящего g в неединичный элемент.

Поскольку $L = 1$, для группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ имеет место условие (λ). Поэтому в силу предложения 6.2 группа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}(\mathscr{T})) = \pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}(\mathscr{T}'))$ удовлетворяет условию (η). Согласно условию $(\bar{\eta})$ (справедливому для группы $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$) и предложению 4.7 для любого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ всякая подгруппа $X \in \mathscr{C}^*(H_{\{v,w\}})$ содержит подгруппу $Y \in \mathscr{C}^*(H_{\{v,w\}})$, нормальную в группе $P_{\{v,w\}}$. Если $\{v, w\} \in \mathscr{E}'$, то гомоморфизм $\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$ действует на подгруппе $H_{\{v,w\}}$ инъективно и потому каждая подгруппа $X \in \mathscr{C}^*(H_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')})$ содержит подгруппу $Y \in \mathscr{C}^*(H_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')})$, нормальную в группе $P_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$. Значит, группа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}(\mathscr{T}'))$ удовлетворяет условию $(\bar{\eta})$.

Для любых вершины $u \in \mathscr{V}'$ и ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}'$ из условия настоящей теоремы, определения системы $\mathscr{R}(\mathscr{T}')$, соотношений

$$G_u\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')} \cong G_u/R_u, \quad G_v\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}/H_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')} \cong G_v/H_{\{v,w\}}R_v,$$
$$G_w\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}/H_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')} \cong G_w/H_{\{v,w\}}R_w$$

и предложения 4.8 вытекает, что группы $G_u\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$, $G_v\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}/H_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$ и $G_w\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}/H_{\{v,w\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируемы. Так как $u \in \mathscr{V}'$, то $R_u \leqslant K_u$. Поэтому если $\overline{M} \in \mathscr{C}^*(K_u\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')})$, то $\overline{M} = M/R_u$ для некоторой подгруппы $M \in \mathscr{C}^*(K_u)$ и ввиду $\mathscr{C}$-квазирегулярности группы G_u по подгруппе K_u найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(G_u)$, удовлетворяющая условию $N \cap K_u \leqslant M$. Из последнего включения легко следует, что $NR_u/R_u \cap K_u/R_u \leqslant M/R_u$. Так как $(G_u/R_u)/(NR_u/R_u) \cong G_u/NR_u \cong (G_u/N)/(NR_u/N)$ и класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то $NR_u/R_u \in \mathscr{C}^*(G_u/R_u)$. Стало быть, группа $G_u\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$ $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе $K_u\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')} = \prod_{v\in\mathscr{N}_{\mathscr{T}'}(u)} H_{\{u,v\}}\rho_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}$.

Таким образом, для группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(\mathscr{T}')}(\mathscr{T}'))$ выполнены все условия теоремы 6, что и требовалось.

§ 8. Доказательства следствий

Предложение 8.1 [32, предложение 18]. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathscr{C}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X, имеющая конечный ранг Гирша — Зайцева. Тогда существует подгруппа $Z \in \mathscr{C}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$.*

Предложение 8.2 [46, предложение 5]. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathscr{C}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X. Если существует подгруппа $Z \in \mathscr{C}^*(X)$, тривиально пересекающаяся с Y, то подгруппа Y $\mathscr{C}$-отделима в группе X.*

Доказательство следствий 1 и 2. Докажем сначала следствие 2 и достаточность условий в обоих утверждениях следствия 1.

Если все реберные подгруппы графа групп $\mathscr{G}(\mathscr{T})$ конечны или имеют конечный ранг Гирша — Зайцева, то ввиду конечности степеней вершин дерева $\mathscr{T}$ тем же свойством обладают и все группы K_v $(v \in \mathscr{V})$. Из аппроксимируемости групп G_v $(v \in \mathscr{V})$ $\mathscr{C}$-группами (в случае следствия 1) или $\mathscr{C}$-группами без кручения (в случае следствия 2) и предложений 4.3, 8.1 следует, что для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ существует подгруппа $N_v \in \mathscr{C}^*(G_v)$, удовлетворяющая условию $N_v \cap K_v = 1$. Ввиду предложений 8.2 и 4.1 это означает, что для всякого ребра $\{u, w\} \in \mathscr{E}$ фактор-группы $G_u/H_{\{u,w\}}$ и $G_w/H_{\{u,w\}}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируемы. Для любых вершины $v \in \mathscr{V}$ и ребра $\{u, w\} \in \mathscr{E}$, если $M_v \in \mathscr{C}^*(K_v)$, то $N_v \cap K_v = 1 \leqslant M_v$, и если $M_{\{u,w\}} \in \mathscr{C}^*(H_{\{u,w\}})$, то единичная подгруппа лежит в $M_{\{u,w\}}$, нормальна в группе $P_{\{u,w\}}$ и принадлежит семейству $\mathscr{C}^*(H_{\{u,w\}})$, так как подгруппа $H_{\{u,w\}}$ вкладывается в $\mathscr{C}$-группу G_u/N_u и содержится в классе $\mathscr{C}$ в силу замкнутости последнего относительно взятия подгрупп. Следовательно, каждая группа G_v $(v \in \mathscr{V})$ $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе K_v и выполняется условие $(\bar{\eta})$. Точно так же проверяется, что группа G_v $(v \in \mathscr{V})$ $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе L и справедливо условие $(\bar{\lambda})$. Поэтому доказываемые утверждения вытекают из теорем 5 и 6.

Остается проверить необходимость условий в обоих утверждениях следствия 1. Так как группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то согласно предложению 4.3 для каждого ребра $\{v, w\} \in \mathscr{E}$ найдется подгруппа $Q_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T})))$, удовлетворяющая условию $Q_{\{v,w\}} \cap H_{\{v,w\}} = 1$. Отсюда и из предложений 4.2, 4.4 вытекает, что $Q_{\{v,w\}} \cap L = 1$, $\mathfrak{L} \in \mathscr{C}$, $Q_{\{v,w\}} \cap P_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}^*(P_{\{v,w\}})$ и $\mathfrak{H}_{\{v,w\}} \in \mathscr{C}$, поскольку $(Q_{\{v,w\}} \cap P_{\{v,w\}}) \cap H_{\{v,w\}} = 1$.

Предложение 8.3 [39, предложения 5.2, 6.1, 6.3, теорема 2.2]. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Класс $\mathscr{C}$-ограниченных нильпотентных групп замкнут относительно взятия подгрупп и фактор-групп.*

2. *Если $\mathscr{C}$-ограниченная нильпотентная группа имеет конечный период, являющийся $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-числом, то она принадлежит классу $\mathscr{C}$.*

3. *Всякая $\mathscr{C}$-ограниченная нильпотентная группа $\mathscr{C}$-квазирегулярна по любой своей подгруппе.*

4. *Подгруппа $\mathscr{C}$-ограниченной нильпотентной группы X $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в X.*

Предложение 8.4 [42, предложение 17]. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп. Тогда произвольная группа из класса $\mathscr{C}$ имеет конечный период.*

Доказательство следствия 3. Ввиду предложений 8.3 и 4.1 из отсутствия $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения в группах G_v $(v \in \mathscr{V})$ и $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированности подгрупп $H_{\{u,w\}}$ $(\{u, w\} \in \mathscr{E})$ или K_v $(v \in \mathscr{V})$ вытекает, что группы G_v $(v \in \mathscr{V})$, а также $G_u/H_{\{u,w\}}$, $G_w/H_{\{u,w\}}$ $(\{u, w\} \in \mathscr{E})$ или G_v/K_v $(v \in \mathscr{V})$ $\mathscr{C}$-аппроксимируемы.

$\mathscr{C}$-квазирегулярность группы G_v $(v \in \mathscr{V})$ по подгруппам K_v и L тоже следует из предложения 8.3.

Если $M \in \mathscr{C}^*(L)$, то согласно предложению 8.4 фактор-группа L/M имеет конечный период q. Положим $N = \operatorname{sgp}\{x^q \mid x \in L\}$. Тогда $N \leqslant M$ и $N\alpha = N$ для любого автоморфизма $\alpha \in \operatorname{Aut} L$. Следовательно, подгруппа N нормальна в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$. Легко видеть также, что q является $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-числом и совпадает с периодом фактор-группы L/N. Отсюда ввиду утверждений 1 и 2 предложения 8.3 вытекает, что L/N — $\mathscr{C}$-ограниченная нильпотентная группа, принадлежащая классу $\mathscr{C}$. Таким образом, группа $\pi_1(\mathscr{G}(\mathscr{T}))$ удовлетворяет условию $(\bar{\lambda})$. Выполнение условия $(\bar{\eta})$ проверяется аналогично. Следовательно, доказываемое утверждение вытекает из теорем 5–7.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту за ряд ценных советов и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1957. V. 7, N 1. P. 29–62.

2. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Т. 5. С. 6–10.

3. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Commun. Algebra. 2015. V. 43, N 2. P. 856–860.

4. *Bogopolski O. V.* Introduction to group theory. Zürich: EMS, 2008.

5. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.

6. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 891–906.

7. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага — Солитэра // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 700–709.

8. *Sokolov E. V.* Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups // J. Algebra. 2021. V. 582. P. 1–25.

9. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Мат. заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 597–612.

10. *Sokolov E. V.* Certain residual properties of HNN-extensions with central associated subgroups // Commun. Algebra. 2022. V. 50, N 3. P. 962–987.

11. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 6. С. 720–740.

12. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений с центральными объединенными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 692–702.

13. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1382–1400.

14. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Мат. сб. 1949. Т. 25, № 3. С. 347–366.

15. *Wong P. C., Tang C. K.* Tree products of residually p-finite groups // Algebra Colloq. 1995. V. 2, N 3. P. 209–212.

16. *Wong P. C., Tang C. K.* Generalised free products and HNN extension of weakly potent groups // Bull. Malaysian Math. Soc. (2). 1995. V. 18. P. 19–25.

17. *Wong P. C., Tang C. K.* Tree products of cyclic subgroup separable groups // Bull. Malaysian Math. Soc. (2). 1995. V. 18. P. 49–54.

18. *Kim G., Tang C. Y.* On generalized free products of residually finite p-groups // J. Algebra. 1998. V. 201, N 1. P. 317–327.
19. *Kim G.* On the residual finiteness of fundamental groups of graphs of certain groups // J. Korean Math. Soc. 2004. V. 41, N 5. P. 913–920.
20. *Wong P. C., Tang C. K., Gan H. W.* Generalized free products of residually p-finite groups // Rocky Mt. J. Math. 2006. V. 36, N 5. P. 1729–1742.
21. *Соколов Е. В.* Некоторые аппроксимационные свойства ограниченных нильпотентных групп и их древесных произведений // Изв. вузов. Математика. 2025. № 4. С. 60–70.
22. *Varsos D.* The residual nilpotence of the fundamental group of certain graphs of groups // Houston J. Math. 1996. V. 22, N 2. P. 233–248.
23. *Wong P. C., Tang C. K.* Tree products and polygonal products of weakly potent groups // Algebra Colloq. 1998. V. 5, N 1. P. 1–12.
24. *Wong K. B., Wong P. C.* Cyclic subgroup separability of certain graph products of subgroup separable groups // Bull. Korean Math. Soc. 2013. V. 50, N 5. P. 1753–1763.
25. *Asri M. S. M., Othman W. A. M., Wong K. B., Wong P. C.* Weak potency and cyclic subgroup separability of certain free products and tree products // Bull. Korean Math. Soc. 2023. V. 60, N 5. P. 1375–1390.
26. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Am. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
27. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.
28. *Sokolov E. V., Tumanova E. A.* To the question of the root-class residuality of free constructions of groups // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, N 2. P. 260–272.
29. *Sokolov E. V.* On conditions for the approximability of the fundamental groups of graphs of groups by root classes of groups // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 12. P. 5444–5452.
30. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1, N 3. P. 301–305.
31. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 605–614.
32. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.
33. *Karras A., Solitar D.* The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup // Trans. Am. Math. Soc. 1970. V. 150, N 1. P. 227–255.
34. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп некоторых обобщенных свободных произведений и HNN-расширений // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 405–422.
35. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.
36. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
37. *Kim G., Tang C. Y.* Cyclic subgroup separability of HNN-extensions with cyclic associated subgroups // Can. Math. Bull. 1999. V. 42, N 3. P. 335–343.
38. *Sokolov E. V., Tumanova E. A.* Certain residual properties of HNN-extensions with normal associated subgroups // J. Group Theory. 2025. DOI: 10.1515/jgth-2025-0071.
39. *Sokolov E. V.* On the separability of subgroups of nilpotent groups by root classes of groups // J. Group Theory. 2023. V. 26, N 4. P. 751–777.
40. *Баранов Д. Р., Соколов Е. В.* Об отделимости абелевых подгрупп свободного произведения двух групп с нормальной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 2. С. 165–179.
41. *Куваев А. Е., Соколов Е. В.* Необходимые условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Изв. вузов. Математика. 2017. № 9. С. 36–47.
42. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 2020. № 3. С. 48–63.
43. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* On various rank conditions in infinite groups // Algebra Discr. Math. 2007. N 4. P. 23–43.
44. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.
45. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

46. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 219–229.

Поступила в редакцию 30 июня 2025 г.
После доработки 8 сентября 2025 г.
Принята к публикации 10 сентября 2025 г.

Соколов Евгений Викторович (ORCID 0000-0002-8256-8016),
Туманова Елена Александровна (ORCID 0000-0002-6193-9834)
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
`ev-sokolov@yandex.ru`, `helenfog@bk.ru`