Сибирский математический журнал
Июль—август, 2021. Том 62, № 4

УДК 512.543

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП ГРАФОВ ГРУПП

Е. В. Соколов

Аннотация. Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу и замкнутый относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod\limits_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathscr{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$. Пусть также G — фундаментальная группа произвольного графа групп. Получены необходимые и достаточные условия аппроксимируемости группы G классом $\mathscr{C}$, обобщающие условия М. Ширвани финитной аппроксимируемости группы G.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.414

Ключевые слова: аппроксимируемость корневым классом групп, финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость разрешимыми группами, фундаментальные группы графов групп, обобщенные свободные произведения, HNN-расширения.

§ 1. Введение. Формулировка результатов

Значительное число утверждений об аппроксимируемости свободных конструкций групп получено с помощью так называемого фильтрационного подхода, впервые предложенного Баумслагом [1] для исследования финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений двух групп. Позднее этот подход был распространен на конструкцию HNN-расширения [2] и адаптирован для изучения аппроксимируемости сначала конечными p-группами [3, 4], а затем произвольными корневыми классами групп [5, 6]. В настоящей статье получены обобщающие эти результаты фильтрационные условия аппроксимируемости корневым классом групп для фундаментальной группы произвольного графа групп, а также описаны некоторые ситуации, в которых указанные условия являются не только достаточными, но и необходимыми.

Напомним, что класс групп $\mathscr{C}$, содержащий хотя бы одну неединичную группу, является *корневым* тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod\limits_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathscr{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$ [7]. Примерами корневых классов могут служить классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), периодических ρ-групп конечного периода (где ρ — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп и всех групп без кручения. Известно также, что пересечение любого числа корневых классов снова корневой класс [7].

Понятие корневого класса введено в [8] и оказалось весьма полезным при изучении аппроксимационных свойств свободных конструкций групп, позволяя доказать сразу много утверждений с использованием одной и той же последовательности рассуждений. Наибольшее количество результатов об аппроксимируемости произвольным корневым классом групп получено применительно к конструкциям обобщенного свободного произведения двух групп и HNN-расширения с одной проходной буквой, а также древесного произведения групп (см., например, [9–15]). Аппроксимируемость корневыми классами фундаментальных групп произвольных графов групп исследуется лишь в [16–18].

Чтобы сформулировать полученные результаты, приведем необходимые определения и обозначения, действующие до конца статьи. Пусть Γ — непустой неориентированный связный граф с множеством вершин V и множеством ребер E (допускаются петли и кратные ребра). Выбирая произвольным образом направления для всех ребер графа Γ, обозначая вершины, являющиеся концами ребра $e \in E$, через $e(1)$, $e(-1)$ и сопоставляя каждой вершине $v \in V$ некоторую группу G_v, а каждому ребру $e \in E$ — группу H_e и инъективные гомоморфизмы $\varphi_{+e}\colon H_e \to G_{e(1)}$, $\varphi_{-e}\colon H_e \to G_{e(-1)}$, получим ориентированный *граф групп*

$$\mathscr{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in V),\ H_e\ (e \in E),\ \varphi_{\varepsilon e}\ (e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)).$$

Будем называть группы G_v $(v \in V)$ и H_e $(e \in E)$ *вершинными* и *реберными группами* соответственно, подгруппы $H_e\varphi_{+e}$ и $H_e\varphi_{-e}$ — *реберными подгруппами.* Последние для краткости будем обозначать через H_{+e} и H_{-e}. Для каждой вершины $v \in V$ положим также

$$\Theta_v = \{(e,\varepsilon) \mid e \in E,\ \varepsilon = \pm 1,\ v = e(\varepsilon)\}, \quad H_v = \operatorname{sgp}\{H_{\varepsilon e} \mid (e,\varepsilon) \in \Theta_v\}.$$

Пусть T — некоторое максимальное поддерево в графе Γ, E_T — множество ребер графа Γ, входящих в дерево T. Рассмотрим представление

$$\langle G_v\ (v \in V),\ t_e\ (e \in E\backslash E_T);\ H_{+e} = H_{-e}\ (e \in E_T),\ t_e^{-1}H_{+e}t_e = H_{-e}\ (e \in E\backslash E_T)\rangle,$$

образующими в котором являются образующие групп G_v $(v \in V)$ и символы t_e $(e \in E\backslash E_T)$, а определяющими соотношениями — соотношения групп G_v $(v \in V)$ и всевозможные соотношения вида

$$h_e\varphi_{+e} = h_e\varphi_{-e} \quad (e \in E_T,\ h_e \in H_e),$$
$$t_e^{-1}(h_e\varphi_{+e})t_e = h_e\varphi_{-e} \quad (e \in E \setminus E_T,\ h_e \in H_e),$$

где $h_e\varphi_{\varepsilon e}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ — слово в образующих группы $G_{e(\varepsilon)}$, задающее образ элемента h_e относительно гомоморфизма $\varphi_{\varepsilon e}$. Известно, что все представления описанного вида, соответствующие различным максимальным поддеревьям графа Γ, определяют одну и ту же группу, которая называется *фундаментальной группой графа групп* $\mathscr{G}(\Gamma)$ и обозначается через $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ [19, § 5.1]. Далее будем считать дерево T фиксированным.

Если $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп, X — произвольная группа, то через $\mathscr{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{C}$. Напомним, что подмножество $Y \subseteq X$ называется *$\mathscr{C}$-отделимым* в X, если $\bigcap\limits_{Z \in \mathscr{C}^*(X)} YZ = Y$ или, что то же самое, для каждого элемента $x \in X \setminus Y$ существует гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathscr{C}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$ [20]. Отметим, что аппроксимируемость группы X классом $\mathscr{C}$ равносильна $\mathscr{C}$-отделимости ее единичной подгруппы.

Для краткости до конца данного параграфа группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ будем обозначать через G. Фильтрационные условия ее аппроксимируемости корневым классом групп выглядят следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный корневой класс групп.*

1. *Если выполняются следующие условия:*

(i) $\forall v \in V \quad \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(G)} (N \cap G_v) = 1,$

(ii) $\forall e \in E,\ \varepsilon = \pm 1 \quad \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(G)} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) = H_{\varepsilon e},$

то группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема.

2. *Если группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то выполняется условие (i).*

В топологических терминах условия (i) и (ii) могут быть описаны следующим образом. Если взять семейство $\mathscr{C}^*(G)$ в качестве базиса окрестностей единицы, то на группе G оказывается заданной так называемая *про-$\mathscr{C}$-топология*. Для любой вершины $v \in V$ семейство $\{N \cap G_v \mid N \in \mathscr{C}^*(G)\}$ служит базисом окрестностей единицы в топологии группы G_v, индуцированной про-$\mathscr{C}$-топологией группы G. Условие (i) означает, что эта индуцированная топология хаусдорфова, а условие (ii) — что любая подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $((e, \varepsilon) \in \Theta_v)$ в ней замкнута.

Отметим, что приведенная теорема обобщает основной результат статьи [21] о финитной аппроксимируемости группы G, а также дополняет условия аппроксимируемости корневым классом групп фундаментальной группы конечного графа групп, полученные в [16] и сформулированные в несколько иных терминах.

Теорема 1, как и другие подобные утверждения, порождает два вопроса.

1. Когда условие (ii) является необходимым для $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы G?

2. Как описать подгруппы $N \cap G_v$ $(v \in V,\ N \in \mathscr{C}^*(G))$, используя свойства групп G_v $(v \in V)$, подгрупп $H_{\varepsilon e}$ $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$ и связывающих эти подгруппы изоморфизмов?

Известно (см. предложение 1 ниже), что для любого ребра $e \in E$ группа G содержит подгруппу, изоморфную свободному произведению групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e} (если e не является петлей) или HNN-расширению группы $G_{e(1)} = G_{e(-1)}$ со связанными подгруппами H_{+e} и H_{-e} (если e — петля). Таким образом, ответ на первый вопрос в значительной степени сводится к его изучению для двух указанных конструкций. Данной задаче посвящена статья [22], где можно найти как ссылки на другие работы той же тематики, так и пример, показывающий, что в общем случае условие (ii) не является необходимым для $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы G. Обобщением некоторых результатов из [22], а также отдельных утверждений из [5, 23] является приводимая далее теорема 2. Отметим, что ее доказательство может служить примером сведения общей ситуации к рассмотрению обобщенного свободного произведения двух групп.

Будем говорить, что слово $w(x, y)$ имеет *специальный вид*, если $w(x, y) = w_1^{\varepsilon_1} \dots w_n^{\varepsilon_n}$, где $n \geq 2$, $w_1, \dots, w_n \in \{x, y\}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ и никакие два соседних символа w_i, w_{i+1} не равны одновременно x или y. Если X — некоторая группа и $x \in X$ — произвольный элемент, то через $\widehat{x}$ будем обозначать внутренний автоморфизм группы X, производимый элементом x.

Теорема 2. *Пусть для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ в группе $G_{e(\varepsilon)}$ имеется подгруппа $L_{\varepsilon e}$, содержащая подгруппу $H_{\varepsilon e}$ собственным образом и удовлетворяющая хотя бы одному из следующих условий:*

1) *существует слово $w(x, y)$ специального вида такое, что $w(x, y) = 1$ для всех $x \in H_{\varepsilon e}$, $y \in L_{\varepsilon e}$;*

2) *группа $L_{\varepsilon e}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству;*

3) *подгруппа $H_{\varepsilon e}$ нормальна в группе $L_{\varepsilon e}$ и существует слово $w(x, y)$ специального вида такое, что $w(\widehat{x}, \widehat{y}|_{H_{\varepsilon e}}) = \mathrm{id}_{H_{\varepsilon e}}$ для всех $x \in H_{\varepsilon e}$, $y \in L_{\varepsilon e}$;*

4) *подгруппа $H_{\varepsilon e}$ нормальна в группе $L_{\varepsilon e}$ и группа, составленная из ограничений на подгруппу $H_{\varepsilon e}$ всевозможных внутренних автоморфизмов группы $L_{\varepsilon e}$, удовлетворяет нетривиальному тождеству.*

Пусть также для любого ребра $e \in E$ если $[L_{+e} : H_{+e}] = 2 = [L_{-e} : H_{-e}]$ и $L_{+e} \neq L_{-e}$, то хотя бы одна из групп L_{+e}, L_{-e} удовлетворяет условию 1 или 3. Тогда для каждого класса групп $\mathscr{C}$ из аппроксимируемости группы G этим классом следует выполнение условия (ii).

В связи со вторым вопросом введем ряд дополнительных понятий и обозначений.

Пусть для каждой вершины $v \in V$ в группе G_v выбрана некоторая нормальная подгруппа R_v. Семейство $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ будем называть *системой совместимых нормальных подгрупп* группы G, если для любого ребра $e \in E$ справедливо равенство $(R_{e(1)} \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1} = (R_{e(-1)} \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1}$.

Пусть

$$\overline{G}_v = G_v/R_v \ (v \in V), \quad R_e = (R_{e(1)} \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1} = (R_{e(-1)} \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1} \ (e \in E),$$
$$\overline{H}_e = H_e/R_e \ (e \in E), \quad \overline{H}_{\varepsilon e} = H_{\varepsilon e}R_{e(\varepsilon)}/R_{e(\varepsilon)} \ (e \in E, \ \varepsilon = \pm 1).$$

Легко видеть, что отображение $\overline{\varphi}_{\varepsilon e}\colon \overline{H}_e \to \overline{G}_{e(\varepsilon)}$ $(e \in E, \varepsilon = \pm 1)$, переводящее смежный класс hR_e $(h \in H_e)$ в элемент $(h\varphi_{\varepsilon e})R_{e(\varepsilon)}$, корректно определено и является изоморфизмом группы $\overline{H}_e$ на подгруппу $\overline{H}_{\varepsilon e}$. Поэтому наряду с графом групп

$$\mathscr{G}(\Gamma) = (\Gamma, \ G_v \ (v \in V), \ H_e \ (e \in E), \ \varphi_{\varepsilon e} \ (e \in E, \ \varepsilon = \pm 1))$$

определен граф групп

$$\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma) = (\Gamma, \ \overline{G}_v \ (v \in V), \ \overline{H}_e \ (e \in E), \ \overline{\varphi}_{\varepsilon e} \ (e \in E, \ \varepsilon = \pm 1)).$$

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп. Назовем систему $\mathscr{R}$ *$\mathscr{C}$-допустимой*, если существует гомоморфизм группы $\overline{G} = \pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективный на всех вершинных группах $\overline{G}_v$ $(v \in V)$.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп и $\mathfrak{R}$ — совокупность всех $\mathscr{C}$-допустимых систем совместимых нормальных подгрупп группы G. Пусть также если $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ и $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$, то $\mathscr{R}(v)$ обозначает подгруппу R_v. Тогда условия (i) и (ii) равносильны условиям*

$(i)'$ $\forall v \in V \ \bigcap\limits_{\mathscr{R} \in \mathfrak{R}} \mathscr{R}(v) = 1$;

$(ii)'$ $\forall e \in E, \ \varepsilon = \pm 1 \ \bigcap\limits_{\mathscr{R} \in \mathfrak{R}} H_{\varepsilon e}\mathscr{R}(e(\varepsilon)) = H_{\varepsilon e}$.

Если класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп и для любых $v \in V$, $N \in \mathscr{C}^*(G_v)$ существует система $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ такая, что $\mathscr{R}(v) \leq N$, то условия $(i)'$ и $(ii)'$, в свою очередь, равносильны условиям

$(i)''$ *все группы* G_v $(v \in V)$ $\mathscr{C}$*-аппроксимируемы;*

$(ii)''$ *для любых* $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ *подгруппа* $H_{\varepsilon e}$ $\mathscr{C}$*-отделима в группе* $G_{e(\varepsilon)}$.

Таким образом, для доказательства аппроксимируемости группы G некоторым корневым классом $\mathscr{C}$ с использованием теоремы 1 требуется

1) располагать достаточными условиями существования гомоморфизма группы $\overline{G}$ на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективного на всех вершинных группах;

2) уметь строить системы совместимых нормальных подгрупп группы G.

Отметим, что из наличия гомоморфизма с перечисленными в п. 1 свойствами следует $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы $\overline{G}$ (см. предложение 7 ниже). Обратное в общем случае неверно: этот вопрос подробно обсуждается в [17]. Ряд результатов о существовании гомоморфизмов указанного вида получен в [5, 6, 17, 24, 25].

Для построения систем совместимых подгрупп группы G на вершинные группы, реберные подгруппы и связывающие их изоморфизмы накладывают те или иные дополнительные ограничения. Такой прием применяется почти во всех работах об аппроксимируемости свободных конструкций групп, где в качестве основного метода доказательства используется фильтрационный подход. Чаще всего рассматриваются ситуации, когда вершинные группы являются конечными, свободными, конечно порожденными абелевыми или конечно порожденными нильпотентными. Для реберных подгрупп наиболее типичные ограничения — это конечность, цикличность, центральность или нормальность в содержащих данные подгруппы вершинных группах.

§ 2. Некоторые свойства фундаментальных групп графов групп. Доказательство теоремы 3

Напомним, что если граф Γ состоит из двух вершин и соединяющего их ребра e, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ называется *свободным произведением групп* $G_{e(1)}$ *и* $G_{e(-1)}$ *с объединенными подгруппами* H_{+e} *и* H_{-e}, а группы $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ — *свободными множителями* данного свободного произведения (используемая здесь и далее терминология, касающаяся свободных произведений с объединенными подгруппами и HNN-расширений, следует монографиям [26, 27]). Запись элемента $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ в виде $g = g_1 \dots g_n$, где $n \geq 1$, каждый сомножитель g_i принадлежит одной из групп $G_{e(1)}$, $G_{e(-1)}$ и никакие два соседних сомножителя g_i, g_{i+1} не лежат одновременно в группе $G_{e(1)}$ или в группе $G_{e(-1)}$, называется *несократимой.* Число n называют *длиной* данной несократимой записи. Из теоремы о нормальной форме для обобщенных свободных произведений (см., например, [26, теорема 4.4]) вытекает, что если элемент $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ обладает хотя бы одной несократимой записью длины, большей 1, то он не принадлежит ни одному из свободных множителей $G_{e(1)}$, $G_{e(-1)}$ и, в частности, отличен от 1.

Если граф Γ имеет только одну вершину v и хотя бы одну петлю, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ называется HNN-*расширением группы* G_v с проходными буквами t_e $(e \in E)$, а группа G_v — *базовой группой* данного HNN-расширения. Запись элемента $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ в виде $g = g_0 t_{e_1}^{\varepsilon_1} g_1 \dots t_{e_n}^{\varepsilon_n} g_n$, где $n \geq 0$, $g_0, g_1, \dots, g_n \in G_v$, $e_1, \dots, e_n \in E$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$, называется *приведенной*, если для каждого $k \in \{1, \dots, n-1\}$ из равенств $e_k = e_{k+1}$ и $\varepsilon_k = -\varepsilon_{k+1}$ следует, что $g_k \notin H_{-\varepsilon_k e_k}$. Как и выше, число n называют *длиной* данной приведенной записи. Известно [28], что если элемент $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ обладает хотя бы одной приведенной записью длины, большей 0, то он не принадлежит базовой группе G_v и, в частности, отличен от 1.

Если Γ' — непустой связный подграф графа Γ, то через $\mathscr{G}(\Gamma')$ будем обозначать граф групп, вершинам и ребрам которого сопоставлены те же группы и гомоморфизмы, что и в графе $\mathscr{G}(\Gamma)$.

Известно, что для каждой вершины $v \in V$ тождественное отображение образующих группы G_v в группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ определяет инъективный гомоморфизм, и это позволяет считать группу G_v подгруппой группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ [19, § 5.2]. Обобщением данного утверждения является

Предложение 1. *Пусть T' — непустое поддерево дерева T, Γ' — связный подграф графа Γ, для которого T' является максимальным поддеревом, и представление группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$ соответствует дереву T'. Тогда тождественное отображение образующих группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$ в группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ определяет инъективный гомоморфизм.*

Доказательство. Пусть граф $\overline{\Gamma}$ получается из Γ путем стягивания подграфа Γ' в точку, и пусть u и $\overline{T}$ — образы подграфа Γ' и дерева T в графе $\overline{\Gamma}$. Из равенства $T' = T \cap \Gamma'$ легко следует, что $\overline{T}$ — максимальное поддерево графа $\overline{\Gamma}$. Сопоставим вершине u группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$, остальным вершинам и ребрам графа $\overline{\Gamma}$ — те же группы, что и в графе групп $\mathscr{G}(\Gamma)$. Если ребро e графа $\overline{\Gamma}$ и число $\varepsilon = \pm 1$ таковы, что $e(\varepsilon) = u$, то поставим в соответствие паре (e, ε) гомоморфизм $\psi_{\varepsilon e} = \varphi_{\varepsilon e}\iota_{e(\varepsilon)}$, где $\iota_{e(\varepsilon)}\colon G_{e(\varepsilon)} \to \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$ — вложение, определяемое тождественным отображением образующих группы $G_{e(\varepsilon)}$. Всем остальным парам (e, ε) сопоставим те же гомоморфизмы, что и в графе групп $\mathscr{G}(\Gamma)$. Обозначим полученный в результате граф групп через $\overline{\mathscr{G}}(\overline{\Gamma})$.

Непосредственно проверяется, что представление группы $\pi_1(\overline{\mathscr{G}}(\overline{\Gamma}))$, соответствующее дереву $\overline{T}$, идентично представлению группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$. Поскольку вершинная группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$ вкладывается в группу $\pi_1(\overline{\mathscr{G}}(\overline{\Gamma}))$ посредством тождественного отображения образующих, отсюда вытекает требуемый результат.

Пусть $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ — система совместимых нормальных подгрупп группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$. Если представление группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ соответствует тому же дереву T, то тождественное отображение образующих группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ в группу $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ определяет сюръективный гомоморфизм, который далее будем обозначать через $\rho_{\mathscr{R}}$. Нетрудно показать, что ядро этого гомоморфизма совпадает с нормальным замыканием в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ множества $\bigcup\limits_{v \in V} R_v$ и для каждой вершины $v \in V$ справедливо равенство $\ker \rho_{\mathscr{R}} \cap G_v = R_v$.

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп.*

1. *Если N — нормальная подгруппа группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, то семейство $\{N \cap G_v \mid v \in V\}$ является системой совместимых нормальных подгрупп группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$. Если $N \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)))$, то данная система $\mathscr{C}$-допустима.*

2. *Пусть $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ — $\mathscr{C}$-допустимая система совместимых нормальных подгрупп группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$. Тогда найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)))$ такая, что $R_v = N \cap G_v$ для всех $v \in V$.*

Доказательство. 1. Положим $R_v = N \cap G_v$ для всех $v \in V$. Для каждого ребра $e \in E$ равенства

$$(R_{e(1)} \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1} = (N \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1} = (N \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1} = (R_{e(-1)} \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1}$$

проверяются непосредственно. Поэтому $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ — система совместимых нормальных подгрупп группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$.

Определим отображение $\sigma\colon \pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma)) \to \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))/N$ по правилу: если $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, то $(g\rho_{\mathscr{R}})\sigma = g\eta$, где $\eta\colon \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) \to \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))/N$ — естественный гомоморфизм. Из включения $\ker\rho_{\mathscr{R}} \leq N$ следует, что это определение корректно; гомоморфность и сюръективность σ очевидны. Остается заметить, что если $v \in V$ и $g \in G_v \setminus R_v$, то из равенства $R_v = N \cap G_v$ вытекают соотношения $g \notin N$ и $(g\rho_{\mathscr{R}})\sigma = g\eta \neq 1$, т. е. гомоморфизм σ действует инъективно на вершинной группе G_v/R_v. Таким образом, если $\operatorname{Im}\sigma = \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))/N \in \mathscr{C}$, то система $\mathscr{R}$ $\mathscr{C}$-допустима.

2. Пусть σ — гомоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, действующий инъективно на всех вершинных группах G_v/R_v $(v \in V)$. Пусть также $N_{\mathscr{R}} = \ker\sigma$ и N — прообраз подгруппы $N_{\mathscr{R}}$ относительно гомоморфизма $\rho_{\mathscr{R}}$. Тогда $N \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)))$ и из равенств $N_{\mathscr{R}} \cap G_v/R_v = 1$ $(v \in V)$ следует, что $N \cap G_v = R_v$ для всех $v \in V$. Таким образом, подгруппа N искомая.

Доказательство теоремы 3. Равносильность условий (i), (ii) и $(i)'$, $(ii)'$ вытекает из предложения 2. Если $N \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)))$ и класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то для каждой вершины $v \in V$ фактор-группа $G_v/N \cap G_v$ изоморфна подгруппе $\mathscr{C}$-группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))/N$ и потому $N \cap G_v \in \mathscr{C}^*(G_v)$. Следовательно, $(i) \Rightarrow (i)''$ и $(ii) \Rightarrow (ii)''$. Импликации $(i)'' \Rightarrow (i)'$ и $(ii)'' \Rightarrow (ii)'$ (в случае выполнения условия теоремы) очевидны.

§ 3. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе, если N — нормальная подгруппа группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, то соответствующие системе совместимых нормальных подгрупп $\mathscr{R} = \{N \cap G_v \mid v \in V\}$ граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma)$ и гомоморфизм $\rho_{\mathscr{R}}$ будем обозначать через $\mathscr{G}_N(\Gamma)$ и ρ_N.

Предложение 3. *Пусть T' — непустое поддерево дерева T, Γ' — связный подграф графа Γ, для которого T' является максимальным поддеревом, и представление группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$ соответствует дереву T'. Пусть также N — нормальная подгруппа группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ и $N' = N \cap \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$. Тогда гомоморфизм ρ_N продолжает гомоморфизм $\rho_{N'}\colon \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma')) \to \pi_1(\mathscr{G}_{N'}(\Gamma'))$.*

Доказательство. Утверждение равносильно коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma')) & \xrightarrow{\iota} & \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) \\
{\scriptstyle\rho_{N'}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho_N} \\
\pi_1(\mathscr{G}_{N'}(\Gamma')) & \xrightarrow{\iota} & \pi_1(\mathscr{G}_N(\Gamma)),
\end{array}$$

где ι обозначает вложения из предложения 1. Последняя имеет место, так как гомоморфизмы ι, $\rho_{N'}$ и ρ_N продолжают тождественные отображения образующих соответствующих групп.

Предложение 4. *Пусть Γ — конечный граф и Ω — непустое семейство нормальных подгрупп группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, удовлетворяющее условиям*

1) $\forall L, M \in \Omega\ \exists N \in \Omega\ N \leq L \cap M$;
2) $\forall v \in V\ \bigcap\limits_{N \in \Omega} (N \cap G_v) = 1$;
3) $\forall e \in E,\ \varepsilon = \pm 1\ \bigcap\limits_{N \in \Omega} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) = H_{\varepsilon e}$.

Если вершина $v \in V$ и подгруппа $X \leq G_v$ таковы, что $\bigcap\limits_{N \in \Omega} X(N \cap G_v) = X$, то для каждого элемента $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) \setminus X$ найдется подгруппа $N \in \Omega$, удовлетворяющая соотношению $g\rho_N \notin X\rho_N$.

Доказательство. Сначала предположим, что граф Γ является деревом, и воспользуемся индукцией по числу вершин в нем. Если Γ содержит только одну вершину v, то $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) = G_v$ и требуемое утверждение вытекает из равенств $X = \bigcap_{N\in\Omega} X(N \cap G_v) = \bigcap_{N\in\Omega} XN$. Поэтому далее будем считать, что в дереве Γ имеется по крайней мере две вершины.

Пусть $e \in E$ — произвольное ребро. При его удалении граф Γ распадается на две компоненты связности. Обозначим через Γ_ε ($\varepsilon = \pm 1$) ту из них, которая содержит вершину $e(\varepsilon)$, и через P_ε — группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma_\varepsilon))$. Тогда группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ представляет собой свободное произведение групп P_1 и P_{-1} с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e}. Для каждого $\varepsilon = \pm 1$ положим $\Omega_\varepsilon = \{N \cap P_\varepsilon \mid N \in \Omega\}$ и заметим, что дерево Γ_ε и семейство Ω_ε удовлетворяют условиям предложения, поэтому к ним можно применить индуктивное предположение.

Пусть вершина $v \in V$ и подгруппа $X \leq G_v$ таковы, что $\bigcap_{N\in\Omega} X(N \cap G_v) = X$, и пусть $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) \setminus X$ — произвольный элемент. Будем считать для определенности, что $X \leq P_1$, и рассмотрим два случая.

Случай 1. $g \in P_1$.

Применяя индуктивное предположение к дереву Γ_1, семейству Ω_1, подгруппе X и элементу g, найдем подгруппу $M \in \Omega_1$ такую, что $g\rho_M \notin X\rho_M$. По определению Ω_1 существует подгруппа $N \in \Omega$, удовлетворяющая равенству $M = N \cap P_1$. В силу предложения 3 гомоморфизм ρ_N продолжает ρ_M. Следовательно, $g\rho_N \notin X\rho_N$ и подгруппа N является искомой.

Случай 2. $g \notin P_1$.

Пусть $g = g_1 \ldots g_n$ — несократимая запись g как элемента свободного произведения групп P_1 и P_{-1} с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e}. Тогда для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ найдется такое $\varepsilon_i = \pm 1$, что $g_i \in P_{\varepsilon_i} \setminus H_{\varepsilon_i e}$, причем $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n-1$), и если $n = 1$, то $\varepsilon_1 = -1$. В силу индуктивного предположения, применяемого к дереву Γ_{ε_i}, семейству Ω_{ε_i}, подгруппе $H_{\varepsilon_i e}$ и элементу g_i, существует подгруппа $L_i \in \Omega_{\varepsilon_i}$, удовлетворяющая соотношению $g_i\rho_{L_i} \notin H_{\varepsilon_i e}\rho_{L_i}$. Выберем подгруппу $M_i \in \Omega$ так, чтобы выполнялось равенство $L_i = M_i \cap P_{\varepsilon_i}$. Тогда согласно условию 1 найдется подгруппа $N \in \Omega$, лежащая в $\bigcap_{1\leq i\leq n} M_i$.

Для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ из определения подгруппы M_i, предложения 3 и соотношения $\ker\rho_N \leq \ker\rho_{M_i}$ следует, что $g_i\rho_N \notin H_{\varepsilon_i e}\rho_N$. Отсюда вытекает, что в группе $\pi_1(\mathscr{G}_N(\Gamma))$, рассматриваемой как свободное произведение групп $\pi_1(\mathscr{G}_N(\Gamma_1))$ и $\pi_1(\mathscr{G}_N(\Gamma_{-1}))$ с объединенными подгруппами $H_{+e}\rho_N$ и $H_{-e}\rho_N$, элемент $g\rho_N$ имеет несократимую запись длины n, и если $n = 1$, то $g\rho_N \in \pi_1(\mathscr{G}_N(\Gamma_{-1})) \setminus H_{-e}\rho_N$. Это в свою очередь означает, что он не может принадлежать подгруппе $X\rho_N$ свободного множителя $\pi_1(\mathscr{G}_N(\Gamma_1))$ и, стало быть, подгруппа N искомая.

Обратимся к общей ситуации и воспользуемся индукцией по числу ребер, не входящих в остовное дерево T графа Γ. База индукции доказана выше, поэтому будем предполагать далее, что имеется по крайней мере одно такое ребро e. Пусть граф Γ' получается из Γ путем удаления ребра e. Тогда группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ представляет собой HNN-расширение группы $B = \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$ с проходной буквой t_e и связанными подгруппами H_{+e} и H_{-e}. Дальнейшие рассуждения следуют той же схеме, что и выше.

Пусть вершина $v \in V$ и подгруппа $X \leq G_v$ таковы, что $\bigcap\limits_{N \in \Omega} X(N \cap G_v) = X$, и пусть $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) \setminus X$ — произвольный элемент. Положим $\Omega' = \{N \cap B \mid N \in \Omega\}$ и рассмотрим два случая.

Случай 1. $g \in B$.

По индуктивному предположению, примененному к графу Γ', семейству Ω', подгруппе X и элементу g, найдется подгруппа $M \in \Omega'$, удовлетворяющая соотношению $g\rho_M \notin X\rho_M$. Тогда искомой является подгруппа $N \in \Omega$ такая, что $M = N \cap B$.

Случай 2. $g \notin B$.

Пусть $g = g_0 t_e^{\varepsilon_1} g_1 \ldots t_e^{\varepsilon_n} g_n$ $(n \geq 1)$ — приведенная запись g как элемента HNN-расширения группы B с проходной буквой t_e. Для каждого $i \in \{0, \ldots, n\}$ определим подгруппу $L_i \in \Omega'$ следующим образом. Если $1 \leq i \leq n-1$ и $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$, то $g_i \notin H_{-\varepsilon_i e}$ и L_i — подгруппа, удовлетворяющая соотношению $g_i \rho_{L_i} \notin H_{-\varepsilon_i e} \rho_{L_i}$, существование которой обеспечивается индуктивным предположением, примененным к графу Γ', семейству Ω', подгруппе $H_{-\varepsilon_i e}$ и элементу g_i. В противном случае L_i — произвольная подгруппа семейства Ω', непустого по условию предложения.

Пусть $M_i \in \Omega$ $(0 \leq i \leq n)$ — подгруппа такая, что $L_i = M_i \cap B$, и $N \in \Omega$ — подгруппа, лежащая в $\bigcap\limits_{0 \leq i \leq n} M_i$. Тогда для каждого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ из равенства $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$ следует, что $g_i \rho_N \notin H_{-\varepsilon_i e} \rho_N$. Поэтому в группе $\pi_1(\mathscr{G}_N(\Gamma))$, рассматриваемой как HNN-расширение группы $\pi_1(\mathscr{G}_N(\Gamma'))$ с проходной буквой t_e и связанными подгруппами $H_{+e}\rho_N$ и $H_{-e}\rho_N$, элемент $g\rho_N$ имеет приведенную запись длины $n \geq 1$ и, следовательно, не принадлежит подгруппе $X\rho_N$, содержащейся в базовой группе. Таким образом, подгруппа N искомая.

Предложение 5. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный корневой класс групп. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Каждая свободная группа аппроксимируется классом $\mathscr{C}$* [9, теорема 1].
2. *Свободное произведение любого семейства $\mathscr{C}$-аппроксимируемых групп, в свою очередь, аппроксимируется классом $\mathscr{C}$* [8, теорема 4.1; 9].
3. *Всякое расширение $\mathscr{C}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathscr{C}$-группы аппроксимируется классом $\mathscr{C}$* [8, лемма 1.5].

Предложение 6 [23, предложение 2]. *Если $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — произвольная группа, то пересечение конечного числа подгрупп семейства $\mathscr{C}^*(X)$ снова является подгруппой данного семейства.*

Предложение 7. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный корневой класс групп. Если каждая группа G_v $(v \in V)$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема и существует гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективный на всех подгруппах H_v $(v \in V)$, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что если граф Γ является деревом, то доказываемое утверждение совпадает с предложением 5 из [25]. Поскольку ограничение σ на подгруппу $\pi_1(\mathscr{G}(T))$ представляет собой гомоморфизм на $\mathscr{C}$-группу, инъективный на всех подгруппах H_v $(v \in V)$, отсюда следует, что древесное произведение $\pi_1(\mathscr{G}(T))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируемо. Так как $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ — HNN-расширение группы $\pi_1(\mathscr{G}(T))$ и $N = \ker \sigma$ — нормальная подгруппа этого

HNN-расширения, тривиально пересекающаяся со всеми связанными подгруппами, то подгруппа N раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы и групп, изоморфных подгруппе $N \cap \pi_1(\mathscr{G}(T))$ [29, теорема 4]. Последняя ввиду доказанного выше $\mathscr{C}$-аппроксимируема, свободная группа аппроксимируется классом $\mathscr{C}$ согласно предложению 5. Следовательно, группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ представляет собой расширение свободного произведения $\mathscr{C}$-аппроксимируемых групп при помощи $\mathscr{C}$-группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))/N$ и потому аппроксимируется классом $\mathscr{C}$ в силу того же предложения 5.

Доказательство теоремы 1. 1. Пусть $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ — произвольный элемент и w — некоторое слово от образующих группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, задающее элемент g. Определим подмножества $V_g \subseteq V$ и $E_g \subseteq E$ следующим образом: $v \in V_g$ тогда и только тогда, когда слово w содержит некоторый образующий группы G_v или обратный к нему; $e \in E_g$ тогда и только тогда, когда в слово w входит символ t_e или t_e^{-1}. Пусть T' — конечное поддерево дерева T, содержащее все вершины множества $V_g \cup \{e(\varepsilon) \mid e \in E_g,\ \varepsilon = \pm 1\}$, Γ' — подграф графа Γ, получающийся путем добавления к дереву T' всех ребер из множества E_g. Тогда группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$ вкладывается в группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ посредством тождественного отображения образующих и $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$.

Пусть
$$\Omega = \{N \cap \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma')) \mid N \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)))\}.$$

Поскольку $\mathscr{C}$ — непустой класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, ему принадлежит единичная группа. Поэтому семейство $\mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)))$ также непусто и в силу предложения 6 вместе с любыми двумя подгруппами содержит их пересечение. Очевидно, что теми же свойствами обладает и Ω. Следовательно, граф Γ' и семейство Ω удовлетворяют условиям предложения 4, согласно которому найдется подгруппа $M \in \Omega$ такая, что $g\rho_M \neq 1$ (здесь в качестве X выбирается единичная подгруппа).

По определению семейства Ω для некоторой подгруппы $N \in \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)))$ справедливо равенство $M = N \cap \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$. Так как согласно предложению 3 гомоморфизм ρ_N продолжает ρ_M, то $g\rho_N \neq 1$. По предложению 2 существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{G}_N(\Gamma)) = \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))\rho_N$ на группу из класса $\mathscr{C}$, действующий инъективно на всех вершинных группах. Значит, группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))\rho_N$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема в силу предложения 7 и отображение ρ_N может быть продолжено до гомоморфизма группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, переводящего g в неединичный элемент.

2. Из $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ следует, что пересечение всех подгрупп семейства $\mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)))$ равно 1, откуда вытекают требуемые равенства.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Предложение 8 [30, лемма 2]. *Если группа удовлетворяет нетривиальному тождеству, то она удовлетворяет тождеству вида*

$$\omega(y, x_1, x_2) = \omega_0(x_1, x_2) y^{\varepsilon_1} \omega_1(x_1, x_2) \ldots y^{\varepsilon_m} \omega_m(x_1, x_2),$$

где $m \geq 1$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{1, -1\}$, $\omega_0(x_1, x_2), \ldots, \omega_m(x_1, x_2) \in \{x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, (x_1 x_2^{-1})^{\pm 1}\}$.

Если X — некоторая группа, Y — ее нормальная подгруппа, через $\mathrm{Aut}_X(Y)$ будем обозначать подгруппу группы $\mathrm{Aut}\, Y$, составленную из ограничений на подгруппу Y всевозможных внутренних автоморфизмов группы X.

Предложение 9. *Пусть $P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi\rangle$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами $H \leq A$ и $K \leq B$, объединенными относительно изоморфизма $\varphi\colon H \to K$, L и M — подгруппы группы P, удовлетворяющие соотношениям $H \leq L \leq A$ и $K \leq M \leq B$. Пусть также выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) существует слово $w(x, y)$ специального вида такое, что $w(x, y) = 1$ для всех $x \in H$, $y \in L$;

2) группа L удовлетворяет нетривиальному тождеству и $[L : H] \geq 3$;

3) подгруппа H нормальна в группе L и существует слово $w(x, y)$ специального вида такое, что $w(\widehat{x}, \widehat{y}|_H) = \mathrm{id}_H$ для всех $x \in H$, $y \in L$;

4) подгруппа H нормальна в группе L, группа $\mathrm{Aut}_L(H)$ удовлетворяет нетривиальному тождеству и $[L : H] \geq 3$.

Тогда для любого непустого семейства Ω нормальных подгрупп группы P справедливы следующие утверждения.

I. *Если $\bigcap\limits_{N\in\Omega} K(N \cap B) \neq K$ и $H \neq L$, то $\bigcap\limits_{N\in\Omega} N \neq 1$.*

II. *Если $\bigcap\limits_{N\in\Omega} H(N \cap A) \neq H$, $K \neq M$ и подгруппа K нормальна в группе M, то $\bigcap\limits_{N\in\Omega} N \neq 1$.*

Доказательство. I. Пусть $b \in \bigcap\limits_{N\in\Omega} K(N \cap B) \setminus K$. Тогда $b \in B \setminus K$ и $b \in KN$ для всех $N \in \Omega$. Рассмотрим четыре случая, соответствующие условиям 1–4, и в каждом из них определим некоторым образом элемент $g \in P$. Затем покажем, что во всех случаях $g \neq 1$, но $g \in N$ для любой подгруппы $N \in \Omega$.

1. Поскольку $H \neq L$, найдется элемент $a \in L \setminus H$. Положим $g = w(b, a)$.

2. Согласно предложению 8 тождество, которому удовлетворяет группа L, можно считать имеющим вид

$$\omega(y, x_1, x_2) = \omega_0(x_1, x_2) y^{\varepsilon_1} \omega_1(x_1, x_2) \ldots y^{\varepsilon_m} \omega_m(x_1, x_2),$$

где $m \geq 1$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{1, -1\}$, $\omega_0(x_1, x_2), \ldots, \omega_m(x_1, x_2) \in \bigl\{x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \bigl(x_1 x_2^{-1}\bigr)^{\pm 1}\bigr\}$. Поскольку $[L : H] \geq 3$, найдутся элементы $a_1, a_2 \in L \setminus H$, лежащие в разных правых смежных классах группы L по подгруппе H. Положим $g = \omega(b, a_1, a_2)$.

3. Заменяя, если нужно, слово w сопряженным, можно считать, что оно начинается символом $y^{\pm 1}$. Положим $g = [b, w(b, a)]$, где a тот же элемент, что и в случае 1.

4. Положим $g = [b, \omega(b, a_1, a_2)]$, где тождество ω и элементы a_1, a_2 определены так же, как и в случае 2.

Длина слова w по определению не меньше 2, поэтому в случае 1 элемент g имеет несократимую запись неединичной длины. Так как элементы a_1, a_2 лежат в разных правых смежных классах группы L по подгруппе H, то $a_1 a_2^{-1} \notin H$ и, значит, в случае 2 длина несократимой записи элемента g равна $2m + 1$, причем первый и последний слоги указанной записи принадлежат множеству $L \setminus H$. Отсюда сразу же следует, что в случае 4 элемент g имеет несократимую запись длины $4m + 4$. Так как в случае 3 слово w начинается символом $y^{\pm 1}$, длина несократимой записи элемента $w(b, a)^{-1} b w(b, a)$ равна $2n + 1$, где n — длина слова w. Значит, элемент g имеет несократимую запись длины, не меньшей $2n$. Таким образом, во всех случаях $g \neq 1$.

Пусть $N \in \Omega$ — произвольная подгруппа. Так как $b \in KN = HN$, в случаях 1 и 2 $w(b, a) \equiv 1 \pmod N$ и $\omega(b, a_1, a_2) \equiv 1 \pmod N$, откуда сразу же получаем, что $g \in N$. Легко видеть, что в случаях 3 и 4 группа $\mathrm{Aut}_{LN/N}(HN/N)$ является гомоморфным образом группы $\mathrm{Aut}_L(H)$ и, следовательно, удовлетворяет тем же тождествам. Стало быть, в этих случаях

$$w(\widehat{bN}, \widehat{aN}|_{HN/N}) = \mathrm{id}_{HN/N}, \quad \omega(\widehat{bN}, \widehat{a_1N}|_{HN/N}, \widehat{a_2N}|_{HN/N}) = \mathrm{id}_{HN/N}$$

и $gN = 1$.

II. Пусть $c \in \bigcap\limits_{N \in \Omega} H(N \cap A) \setminus H$ и $d \in M \setminus K$. Тогда для любой подгруппы $N \in \Omega$ справедливы соотношения $c \in HN = KN$ и $d^{-1}cd \in KN$, поскольку подгруппа K нормальна в M. Заменим в определениях элемента g из рассмотренных выше случаев 1–4 элементы a и b на c и $d^{-1}cd$ соответственно. Легко видеть, что после такой замены длина несократимой записи элемента g лишь увеличится и, значит, указанный элемент по-прежнему будет отличен от 1. При этом те же рассуждения, что и выше, доказывают включение $g \in N$ для всех $N \in \Omega$.

Предложение 10. *Пусть для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ в группе $G_{e(\varepsilon)}$ имеется подгруппа $L_{\varepsilon e}$, содержащая подгруппу $H_{\varepsilon e}$ собственным образом и удовлетворяющая хотя бы одному из следующих условий:*

1) *существует слово $w(x, y)$ специального вида такое, что $w(x, y) = 1$ для всех $x \in H_{\varepsilon e}$, $y \in L_{\varepsilon e}$;*

2) *группа $L_{\varepsilon e}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству;*

3) *подгруппа $H_{\varepsilon e}$ нормальна в группе $L_{\varepsilon e}$ и существует слово $w(x, y)$ специального вида такое, что $w(\widehat{x}, \widehat{y}|_{H_{\varepsilon e}}) = \mathrm{id}_{H_{\varepsilon e}}$ для всех $x \in H_{\varepsilon e}$, $y \in L_{\varepsilon e}$;*

4) *подгруппа $H_{\varepsilon e}$ нормальна в группе $L_{\varepsilon e}$ и группа $\mathrm{Aut}_{L_{\varepsilon e}}(H_{\varepsilon e})$ удовлетворяет нетривиальному тождеству.*

Пусть также для любого ребра $e \in E$, если $[L_{+e} : H_{+e}] = 2 = [L_{-e} : H_{-e}]$ и $L_{+e} \neq L_{-e}$, то хотя бы одна из групп L_{+e}, L_{-e} удовлетворяет условию 1 или 3. Тогда для каждого непустого семейства Ω нормальных подгрупп группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ из равенства $\bigcap\limits_{N \in \Omega} N = 1$ следует, что $\bigcap\limits_{N \in \Omega} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) = H_{\varepsilon e}$ для всех $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$.

Доказательство. Рассуждая от противного, зафиксируем ребро $e \in E$ и число $\varepsilon = \pm 1$, предположим, что $\bigcap\limits_{N \in \Omega} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) \neq H_{\varepsilon e}$, и покажем, что тогда $\bigcap\limits_{N \in \Omega} N \neq 1$.

Согласно условию предложения имеет место по крайней мере одно из следующих утверждений:

(α) $L_{+e} = L_{-e}$;

(β) $[L_{+e} : H_{+e}] \geq 3$ или $[L_{-e} : H_{-e}] \geq 3$;

(γ) хотя бы одна из групп L_{+e}, L_{-e} удовлетворяет условию 1 или 3.

Рассмотрим три взаимоисключающих случая.

Случай 1. Справедливо утверждение (β) или (γ), ребро e принадлежит дереву T.

Согласно предложению 1 подгруппа $P = \mathrm{sgp}\{G_{e(1)}, G_{e(-1)}\}$ представляет собой свободное произведение групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e}. Положим $\Omega_P = \{N \cap P \mid N \in \Omega\}$. Тогда $\bigcap\limits_{N \in \Omega_P} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) \neq H_{\varepsilon e}$.

Пусть подгруппы $H = H_{-\varepsilon e}$ и $L = L_{-\varepsilon e}$ удовлетворяют хотя бы одному из условий 1–4 предложения 9 (отметим, что от условий настоящего предложения они отличаются лишь дополнительным ограничением на индекс $[L : H]$).

Применяя утверждение I предложения 9 к группе P и семейству Ω_P (в роли H, K, L и M выступают подгруппы $H_{-\varepsilon e}$, $H_{\varepsilon e}$, $L_{-\varepsilon e}$ и $L_{\varepsilon e}$ соответственно), получаем, что $\bigcap\limits_{N\in\Omega_P} N\neq 1$ и, следовательно, $\bigcap\limits_{N\in\Omega} N\neq 1$.

Предположим, что группа $L_{-\varepsilon e}$ не удовлетворяет ни условию 1, ни условию 3 настоящего предложения и $[L_{-\varepsilon e}:H_{-\varepsilon e}]=2$ (иначе говоря, условия предложения 9 для $L_{-\varepsilon e}$ не выполняются). Тогда подгруппа $H_{-\varepsilon e}$ нормальна в группе $L_{-\varepsilon e}$, и если группа $L_{\varepsilon e}$ также не удовлетворяет ни одному из условий 1, 3 настоящего предложения, то утверждение (γ) не имеет места и $[L_{\varepsilon e}:H_{\varepsilon e}]\geq 3$ в силу утверждения (β). Это означает, что для подгрупп $H=H_{\varepsilon e}$ и $L=L_{\varepsilon e}$ справедливо хотя бы одно из условий 1–4 предложения 9 и потому к группе P и семейству Ω_P можно применить его утверждение II (теперь подгруппы $H_{-\varepsilon e}$ и $H_{\varepsilon e}$, $L_{-\varepsilon e}$ и $L_{\varepsilon e}$ меняются местами и выступают в роли K и H, M и L соответственно). Таким образом, снова $\bigcap\limits_{N\in\Omega} N\neq 1$.

Случай 2. Справедливо утверждение (β) или (γ), ребро e не принадлежит дереву T.

Пусть P — свободное произведение групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ с подгруппами H_{+e} и H_{-e}, объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}\colon H_{+e}\to H_{-e}$, и σ — отображение порождающих группы P в группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, действующее на образующих группы $G_{e(1)}$ по правилу $x\mapsto x^{t_e}=t_e^{-1}xt_e$, а на образующих группы $G_{e(-1)}$ — по правилу $x\mapsto x$. Очевидно, что, будучи продолженным до отображения слов, σ переводит все определяющие соотношения группы P в равенства, верные в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, и потому задает гомоморфизм. Легко видеть также, что σ действует инъективно на группах $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ и ставит в соответствие любому элементу группы P, имеющему несократимую запись неединичной длины, элемент группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ (рассматриваемой как HNN-расширение с проходной буквой t_e), обладающий неприводимой записью ненулевой длины. Таким образом, гомоморфизм σ инъективен и $P\cong \operatorname{sgp}\bigl\{G_{e(1)}^{t_e},G_{e(-1)}\bigr\}$.

Поскольку все подгруппы семейства Ω нормальны в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, из соотношения $\bigcap\limits_{N\in\Omega} H_{+e}(N\cap G_{e(1)})\neq H_{+e}$ (если оно имеет место) следует, что

$$\bigcap_{N\in\Omega} H_{+e}^{t_e}\bigl(N\cap G_{e(1)}^{t_e}\bigr)\neq H_{+e}^{t_e}.$$

Кроме того, $\bigl[L_{+e}^{t_e}:H_{+e}^{t_e}\bigr]=[L_{+e}:H_{+e}]$. Поэтому остается применить предложение 9 к группе $\operatorname{sgp}\bigl\{G_{e(1)}^{t_e},G_{e(-1)}\bigr\}$ и подгруппам $L_{+e}^{t_e}$, L_{-e} так же, как и в случае 1.

Случай 3. Утверждение (α) справедливо, а (β) и (γ) — нет.

Для удобства обозначим подгруппы $L_{+e}=L_{-e}$ и $\bigcap\limits_{N\in\Omega} H_{\varepsilon e}(N\cap G_{e(\varepsilon)})$ через L_e и $B_{\varepsilon e}$ соответственно. Так как утверждения (β) и (γ) не выполняются, то $[L_e:H_{+e}]=2=[L_e:H_{-e}]$ и хотя бы одна из групп L_e, $\operatorname{Aut}_{L_e}(H_{+e})$, $\operatorname{Aut}_{L_e}(H_{-e})$ удовлетворяет нетривиальному тождеству, которое в силу предложения 8 можно считать имеющим вид

$$\omega(y,x_1,x_2)=\omega_0(x_1,x_2)y^{\varepsilon_1}\omega_1(x_1,x_2)\ldots y^{\varepsilon_m}\omega_m(x_1,x_2),$$

где $m\geq 1$, $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m\in\{1,-1\}$, $\omega_0(x_1,x_2),\ldots,\omega_m(x_1,x_2)\in\bigl\{x_1^{\pm1},x_2^{\pm1},\bigl(x_1x_2^{-1}\bigr)^{\pm1}\bigr\}$.

Предположим, что ребро e принадлежит дереву T. Тогда, как отмечено выше, подгруппа $P=\operatorname{sgp}\{G_{e(1)},G_{e(-1)}\}$ представляет собой свободное произведение групп $G_{e(1)}$, $G_{e(-1)}$ с объединенными подгруппами H_{+e}, H_{-e} и потому в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ выполняются равенства $H_{+e} = G_{e(1)} \cap G_{e(-1)} = H_{-e}$ [26, следствие 4.4.3]. Поскольку $H_{+e} \neq L_{+e} \leq G_{e(1)}$ и $H_{-e} \neq L_{-e} \leq G_{e(-1)}$, отсюда вытекает, что $L_{+e} \neq L_{-e}$ в противоречие с утверждением (α). Следовательно, ребро e не принадлежит дереву T.

Зафиксируем элементы $b \in B_{\varepsilon e} \setminus H_{\varepsilon e}$, $g \in L_e \setminus (H_{+e} \cup H_{-e})$ и заметим, что для любой подгруппы $N \in \Omega$ из соотношений $H_{\varepsilon e} \leq B_{\varepsilon e} \leq H_{\varepsilon e}N$ вытекает, что $B_{\varepsilon e}N = H_{\varepsilon e}N$. Так как $[L_e : H_{\varepsilon e}] = 2$, то либо $H_{\varepsilon e} \leq L_e \leq B_{\varepsilon e}$, либо $H_{\varepsilon e} = B_{\varepsilon e} \cap L_e$. Сначала предположим, что $H_{\varepsilon e} \leq L_e \leq B_{\varepsilon e}$.

Пусть
$$x = \omega\bigl(g,\ t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon},\ t_e^{-2\varepsilon} b t_e^{2\varepsilon}\bigr), \quad y = \bigl[g^{-1} t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon} g,\ x\bigr].$$
Тогда
$$\omega_i\bigl(t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon},\ t_e^{-2\varepsilon} b t_e^{2\varepsilon}\bigr) \in \bigl\{t_e^{-\varepsilon} b^{\pm 1} t_e^{\varepsilon},\ t_e^{-2\varepsilon} b^{\pm 1} t_e^{2\varepsilon},\ \bigl(t_e^{-\varepsilon} b t_e^{-\varepsilon} b^{-1} t_e^{2\varepsilon}\bigr)^{\pm 1}\bigr\} \quad (0 \leq i \leq m),$$
и так как $b \notin H_{\varepsilon e}$, $g \notin H_{-\varepsilon e}$, то элементы x, y имеют приведенные записи ненулевой длины и, следовательно, отличны от 1.

Пусть $N \in \Omega$ — произвольная подгруппа. Тогда $H_{\varepsilon e}N = L_e N = B_{\varepsilon e}N$, $b \in H_{\varepsilon e}N$, $t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon} \in H_{-\varepsilon e}N \leq L_e N = H_{\varepsilon e}N$ и $t_e^{-2\varepsilon} b t_e^{2\varepsilon} \in H_{-\varepsilon e}N$. Поэтому если группа L_e удовлетворяет тождеству ω, то $x \equiv 1 \pmod N$. Поскольку подгруппа $H_{-\varepsilon e}$ нормальна в группе L_e, из соотношения $t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon} \in H_{-\varepsilon e}N$ вытекает, что $g^{-1} t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon} g \in H_{-\varepsilon e}N \leq L_e N = H_{\varepsilon e}N$. Следовательно, если одна из групп $\mathrm{Aut}_{L_e}(H_{+e})$, $\mathrm{Aut}_{L_e}(H_{-e})$ удовлетворяет тождеству ω, то внутренний автоморфизм, производимый в фактор-группе $L_e N/N$ элементом xN, действует тождественно на элемент $\bigl(g^{-1} t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon} g\bigr)N \in H_{-\varepsilon e}N/N \cap H_{\varepsilon e}N/N$ и потому $y \equiv 1 \pmod N$.

Таким образом, подгруппа $\bigcap\limits_{N \in \Omega} N$ содержит хотя бы один из неединичных элементов x, y.

Пусть $H_{\varepsilon e} = B_{\varepsilon e} \cap L_e$. Положим
$$x = \omega\bigl(t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon},\ b,\ g\bigr), \quad y_{-\varepsilon} = \bigl[t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon},\ x\bigr], \quad y_{\varepsilon} = \bigl[\bigl(t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon}\bigr)^{-1} b \bigl(t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon}\bigr),\ x\bigr].$$

Из соотношения $H_{\varepsilon e} = B_{\varepsilon e} \cap L_e$ вытекает, что $b \notin L_e$ и потому $bg^{-1} \notin L_e$. Следовательно, $b \notin H_{+e} \cup H_{-e}$, $\omega_i(b, g) \notin H_{+e} \cup H_{-e}$ $(0 \leq i \leq m)$ и элементы x, y_{ε}, $y_{-\varepsilon}$ имеют приведенные записи ненулевой длины. Вместе с тем если $N \in \Omega$, то $b \in H_{\varepsilon e}N$, $t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon} \in H_{-\varepsilon e}N$ и $\bigl(t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon}\bigr)^{-1} b \bigl(t_e^{-\varepsilon} b t_e^{\varepsilon}\bigr) \in H_{\varepsilon e}N$ (ввиду нормальности подгруппы $H_{\varepsilon e}$ в группе L_e), откуда $xN = 1$, $y_{\varepsilon}N = 1$ или $y_{-\varepsilon}N = 1$ в зависимости от того, какая группа — L_e, $\mathrm{Aut}_{L_e}(H_{\varepsilon e})$ или $\mathrm{Aut}_{L_e}(H_{-\varepsilon e})$ — удовлетворяет тождеству ω. Таким образом, снова $\bigcap\limits_{N \in \Omega} N \neq 1$.

Теорема 2 следует из предложения 10, если положить $\Omega = \mathscr{C}^*(\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)))$. Как видно из приведенного доказательства, использование в формулировке данного предложения произвольного семейства Ω может оказаться более удобным для последующего его применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.
2. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN-extensions // Comm. Algebra. 1978. V. 6, N 2. P. 179–194.
3. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.

4. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2000. № 3. С. 129–140.
5. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.
6. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.
7. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. V. 43, N 2. P. 856–860.
8. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.
9. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. № 5. С. 6–10.
10. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 767–780.
11. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.
12. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага — Солитэра // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 700–709.
13. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Мат. заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 597–612.
14. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 891–906.
15. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых HNN-расширений групп // Изв. вузов. Математика. 2020. № 12. С. 41–50.
16. *Aschenbrenner M., Friedl S.* 3-manifold groups are virtually residually p // Memoirs Amer. Math. Soc. 2013. V. 225, N 1058. P. 1–100.
17. *Sokolov E. V., Tumanova E. A.* To the question of the root-class residuality of free constructions of groups // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, N 2. P. 260–272.
18. *Sokolov E. V.* Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups // J. Algebra. 2021. V. 582. P. 1–25.
19. *Serre J.-P.* Trees. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verl., 1980.
20. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
21. *Shirvani M.* On residually finite graph products // J. Pure Appl. Algebra. 1987. V. 49. P. 281–282.
22. *Куваев А. Е., Соколов Е. В.* Необходимые условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Изв. вузов. Математика. 2017. № 9. С. 36–47.
23. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 2020. № 3. С. 48–63.
24. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 6. С. 720–740.
25. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений с центральными объединенными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 692–702.
26. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
27. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
28. *Britton J. L.* The word problem // Ann. Math. 1963. V. 77, N 1. P. 16–32.
29. *Cohen D. E.* Subgroups of HNN groups // J. Austral. Math. Soc. 1974. V. 17, N 4. P. 394–405.

30. *Shirvani M.* On residually finite HNN-extensions // Arch. Math. 1985. V. 44. P. 110–115.

Статья поступила 27 февраля 2021 г.
После доработки 9 июня 2021 г.
Принята к публикации 11 июня 2021 г.

Соколов Евгений Викторович
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
ev-sokolov@yandex.ru