Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2021. Том 62, № 6

УДК 512.543

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ ГРУПП С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ РЕБЕРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Е. В. Соколов

Аннотация. Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу и замкнутый относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathscr{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$. Пусть также G либо древесное произведение конечного числа групп с центральными реберными подгруппами, либо фундаментальная группа произвольного графа групп с тривиально пересекающимися центральными реберными подгруппами. Получены некоторые достаточные условия аппроксимируемости группы G классом $\mathscr{C}$.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.613

Ключевые слова: аппроксимируемость корневым классом групп, финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость разрешимыми группами, фундаментальные группы графов групп, древесные произведения, HNN-расширения.

§ 1. Введение

Статья продолжает работы [1–3], и основной ее целью является изучение аппроксимируемости корневыми классами групп фундаментальных групп графов групп с центральными тривиально пересекающимися реберными подгруппами. Подробные сведения о корневых классах и аппроксимируемости ими свободных конструкций групп можно найти, например, в [2]. Здесь лишь напомним, что класс групп $\mathscr{C}$ является корневым тогда и только тогда, когда он содержит хотя бы одну неединичную группу и замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathscr{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$.

Подавляющее большинство утверждений об аппроксимируемости свободных конструкций групп доказано для обобщенных свободных произведений двух групп и HNN-расширений с одной проходной буквой, а также в меньшей степени для древесных произведений. Почти во всех этих утверждениях на группы, входящие в состав конструкции, накладываются такие ограничения, которые не позволяют использовать в качестве указанных групп другие свободные конструкции. Поэтому, несмотря на то, что фундаментальные группы произвольных графов групп представляют собой HNN-расширения древесных произведений, свести их изучение к рассмотрению перечисленных выше частных случаев не удается. Как следствие, результатов об аппроксимируемости таких групп имеется довольно мало. Для них известны

— критерии финитной [4] и нильпотентной [5] аппроксимируемости в случае, когда все вершинные группы графа конечны;

— критерии финитной [6] и нильпотентной [7] аппроксимируемости, аппроксимируемости конечными ρ-группами [8], где ρ — непустое множество простых чисел, аппроксимируемости произвольным корневым классом групп [7] при условии, что граф конечен и все его вершинные группы и реберные подгруппы бесконечные циклические;

— критерий финитной аппроксимируемости в случае, когда граф конечен и все его вершинные группы конечно порожденные нильпотентные без кручения [9];

— критерий аппроксимируемости произвольным корневым классом групп для фундаментальной группы графа изоморфных групп [10];

— некоторые достаточные условия финитной аппроксимируемости конечного графа групп, у которого либо все вершинные группы почти свободны [11], либо все реберные подгруппы циклические [12].

Таким образом, несмотря на довольно сильные ограничения, накладываемые на графы групп в данной статье, полученные в ней результаты дают определенное продвижение в рассматриваемой области.

В [3] приводятся общие необходимые и достаточные условия аппроксимируемости корневым классом групп фундаментальной группы произвольного графа групп. Однако для их применения необходимо помимо прочего уметь строить гомоморфизмы указанной фундаментальной группы на группы из аппроксимирующего класса, действующие инъективно на всех вершинных группах. В случае центральных реберных подгрупп общий подход к построению таких гомоморфизмов предложен в [1]. Здесь этот подход применяется к графам групп с центральными тривиально пересекающимися реберными подгруппами (теорема 1). Тот же метод позволяет доказать, что (при некоторых дополнительных условиях) от требования тривиальности пересечения реберных подгрупп можно отказаться, если граф содержит не более одного простого цикла (теорема 2). Вместе с тем известные результаты об аппроксимируемости HNN-расширений с центральными связанными подгруппами (см., например, [13–15]) показывают, что появление в графе групп циклов и нетривиально пересекающихся реберных подгрупп приводит к значительному усложнению условий аппроксимируемости его фундаментальной группы и полный аналог теоремы 1 в этом случае не может быть доказан.

Теоремы 1 и 2 доставляют в том числе достаточные условия аппроксимируемости фундаментальной группы графа групп. Однако они неявно предполагают, что все реберные подгруппы графа принадлежат аппроксимирующему классу. Используя результаты из [3], это ограничение удается преодолеть для графов групп с тривиально пересекающимися реберными подгруппами и древесных произведений конечного числа групп, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям (теоремы 3 и 4).

Отметим, что даже если некая изучаемая группа конечно определена, ее строение может описываться при помощи фундаментальных групп бесконечных графов групп (например, нормальное замыкание базы HNN-расширения представляет собой древесное произведение бесконечного числа изоморфных копий базовой группы). Поэтому в данной работе предприняты усилия к тому, чтобы всюду, где это возможно, избежать требования конечности рассматриваемого графа, несмотря на определенное усложнение условий и доказательств ряда утверждений.

§ 2. Формулировка результатов

В отношении графов групп будем придерживаться тех же обозначений и предположений, что и в [3]. А именно, до конца статьи будем считать, что Γ — непустой неориентированный связный граф с множеством вершин V и множеством ребер E (допустимы петли и кратные ребра), T — некоторое максимальное поддерево в графе Γ, E_T — множество ребер дерева T. Выбирая произвольным образом направления для всех ребер графа Γ, обозначая вершины, являющиеся концами ребра $e \in E$, через $e(1)$, $e(-1)$ и сопоставляя каждой вершине $v \in V$ некоторую группу G_v, а каждому ребру $e \in E$ — группу H_e и инъективные гомоморфизмы $\varphi_{+e}\colon H_e \to G_{e(1)}$, $\varphi_{-e}\colon H_e \to G_{e(-1)}$, получим ориентированный *граф групп*

$$\mathscr{G}(\Gamma) = (\Gamma,\ G_v\ (v \in V),\ H_e\ (e \in E),\ \varphi_{\varepsilon e}\ (e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)).$$

Группы G_v $(v \in V)$ будем называть *вершинными*, подгруппы $H_{+e} = H_e\varphi_{+e}$ и $H_{-e} = H_e\varphi_{-e}$ — *реберными*. Для каждой вершины $v \in V$ положим

$$\Theta_v = \{(e,\varepsilon) \mid e \in E,\ \varepsilon = \pm 1,\ v = e(\varepsilon)\}, \quad H_v = \operatorname{sgp}\{H_{\varepsilon e} \mid (e,\varepsilon) \in \Theta_v\}.$$

Напомним, что представление фундаментальной группы графа групп, вообще говоря, зависит от выбора максимального поддерева этого графа. В данной статье предполагается, что фундаментальная группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ графа групп $\mathscr{G}(\Gamma)$ имеет представление, соответствующее зафиксированному ранее дереву T:

$$\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) = \left\langle \begin{matrix} G_v\ (v \in V),\ t_e\ (e \in E \setminus E_T); \\ H_{+e} = H_{-e}\ (e \in E_T),\ t_e^{-1}H_{+e}t_e = H_{-e}\ (e \in E \setminus E_T) \end{matrix} \right\rangle.$$

Рассмотрим следующий набор свойств графа $\mathscr{G}(\Gamma)$:

(1) для каждой вершины $v \in V$ подгруппа H_v представляет собой прямое произведение подгрупп $H_{\varepsilon e}$ $((e,\varepsilon) \in \Theta_v)$;

(2) граф Γ является деревом;

(3) граф Γ содержит в точности один простой цикл.

Будем говорить, что граф групп $\mathscr{G}(\Gamma)$ *имеет тип* (k) $(1 \le k \le 3)$, если он обладает свойством (k) и для каждой вершины $v \in V$ подгруппа H_v лежит в центре группы G_v.

Отметим, что при выполнении свойства (3) группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ представляет собой HNN-расширение с одной проходной буквой древесного произведения групп G_v $(v \in V)$. Далее при рассмотрении таких групп всегда будет требоваться, чтобы аппроксимирующий класс $\mathscr{C}$ содержал непериодические группы. Хотя это дополнительное ограничение не имеет никакого отношения к группе $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, для упрощения формулировок утверждений его удобно включить в описание типа графа групп. Поэтому будем использовать выражение «граф групп имеет тип $(3)_{+\mathscr{C}}$» как сокращение для конъюнкции «граф групп имеет тип (3) и класс $\mathscr{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу».

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1) *и для каждой вершины $v \in V$ группа G_v обладает гомоморфизмом σ_v на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективным на подгруппе H_v. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если прямое произведение D групп $G_v\sigma_v$ ($v \in V$) принадлежит классу $\mathscr{C}$, то существует гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, продолжающий гомоморфизмы σ_v ($v \in V$).*

2. *Если все группы G_v ($v \in V$) $\mathscr{C}$-аппроксимируемы, то и группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

3. *Пусть $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$ — класс всех $\mathscr{C}$-групп без кручения, для каждой вершины $v \in V$ группа $G_v\sigma_v$ не имеет кручения и подгруппа $H_v\sigma_v$ изолирована в ней. Тогда*

а) *если $D \in \mathscr{C}$, то гомоморфизм σ можно выбрать так, чтобы выполнялось включение $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))\sigma \in \mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$;*

б) *если все группы G_v ($v \in V$) $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируемы, то и группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируема.*

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (2) или $(3)_{+\mathscr{C}}$. Пусть также для каждой вершины $v \in V$ группа G_v обладает гомоморфизмом σ_v на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективным на подгруппе H_v, и прямое произведение D групп $G_v\sigma_v$ ($v \in V$) принадлежит классу $\mathscr{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, продолжающий гомоморфизмы σ_v ($v \in V$).*

2. *Если все группы G_v ($v \in V$) $\mathscr{C}$-аппроксимируемы, то и группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

3. *Пусть $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$ — класс всех $\mathscr{C}$-групп без кручения, для каждой вершины $v \in V$ группа $G_v\sigma_v$ не имеет кручения и все подгруппы $H_{\varepsilon e}\sigma_v$ ($(e,\varepsilon) \in \Theta_v$) изолированы в ней. Тогда*

а) *гомоморфизм σ можно выбрать так, чтобы выполнялось включение $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))\sigma \in \mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$;*

б) *если все группы G_v ($v \in V$) $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируемы, то и группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируема.*

Отметим, что содержащиеся в условии теоремы 2 требования принадлежности классу $\mathscr{C}$ прямого произведения D и (если Γ не является деревом) хотя бы одной непериодической группы, вообще говоря, существенны для $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$: это следует из основных результатов работ [16] и [15] соответственно. Приводимые далее утверждения обобщают следствия 2, 3 из [1] и следствия 1, 2 из [2].

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (1), (2) или (3), для каждой вершины $v \in V$ группа G_v разрешима и ступени разрешимости групп G_v ограничены в совокупности. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ аппроксимируется разрешимыми группами.*

2. *Пусть все группы G_v ($v \in V$) не имеют кручения и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) *$\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (1) и для каждой вершины $v \in V$ подгруппа H_v изолирована в группе G_v;*

б) *$\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (2) или (3) и для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Тогда группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ аппроксимируется разрешимыми группами без кручения.

3. *Если $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (1) или (2) и для некоторого множества простых чисел ρ все группы G_v ($v \in V$) являются периодическими ρ-группами,*

причем их периоды ограничены в совокупности, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ аппроксимируется периодическими разрешимыми ρ-группами конечного периода.

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1) *или конечный граф групп типа* (2) *или* $(3)_{+\mathscr{C}}$. *Группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ является $\mathscr{C}$-аппроксимируемой, если для любой вершины $v \in V$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) *группа G_v принадлежит классу $\mathscr{C}$;*

2) *группа G_v $\mathscr{C}$-аппроксимируема и подгруппа H_v конечна;*

3) *группа G_v аппроксимируется $\mathscr{C}$-группами без кручения и подгруппа H_v имеет конечный ранг.*

Всюду далее если $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп и X — некоторая группа, через $\mathscr{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{C}$. Напомним (см. [17]), что подгруппа Y группы X называется *$\mathscr{C}$-отделимой* (в X), если $\bigcap\limits_{Z \in \mathscr{C}^*(X)} YZ = Y$. Таким образом, группа X $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа $\mathscr{C}$-отделима. Будем говорить также, что группа X *$\mathscr{C}$-регулярна* по своей подгруппе Y, если всякая подгруппа $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ совпадает с некоторой подгруппой вида $N \cap Y$, где $N \in \mathscr{C}^*(X)$.

Отметим, что понятие регулярности обобщает классическое понятие *мощного элемента* [18]: если $\mathscr{F}$ — класс всех конечных групп, то элемент $x \in X$ является мощным тогда и только тогда, когда группа X $\mathscr{F}$-регулярна по циклической подгруппе $\langle x \rangle$. Как и мощность, регулярность используется при изучении аппроксимируемости свободных конструкций групп для построения подгрупп вершинных групп, имеющих заданное пересечение с реберными подгруппами; подробнее об этом написано в [19, § 2.3].

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1). *Пусть также для любой вершины $v \in V$ группа G_v $\mathscr{C}$-аппроксимируема и $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе H_v, подгруппа H_v $\mathscr{C}$-отделима в группе G_v. Тогда группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Предваряя формулировку следующей теоремы, заметим, что если $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) или (2), то без потери общности для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ можно считать выполненным неравенство $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$.

В самом деле, если Γ — дерево и $H_{\varepsilon e} = G_{e(\varepsilon)}$ для некоторых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$, то в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ справедливы соотношения $G_{e(\varepsilon)} = H_{-\varepsilon e} \leq G_{e(-\varepsilon)}$ и, значит, из ее представления можно исключить образующие группы $G_{e(\varepsilon)}$. Результатом этой операции служит фундаментальная группа графа групп, который получается из $\mathscr{G}(\Gamma)$ стягиванием ребра e и заменой для каждой пары $(f, \delta) \in \Theta_{e(\varepsilon)} \setminus \{(e, \varepsilon)\}$ гомоморфизма $\varphi_{\delta f}$ композицией $\varphi_{\delta f}\varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e}$. Понятно, что указанный граф групп снова является деревом.

Если $\mathscr{G}(\Gamma)$ имеет тип (1) и $H_{\varepsilon e} = G_{e(\varepsilon)}$, то, выбирая дерево T содержащим ребро e, получаем, что в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ справедливо равенство $H_{\varepsilon e} = H_{-\varepsilon e}$. Следовательно, ее представление и граф групп могут быть преобразованы так же, как и выше. Поскольку $H_{\varepsilon e}$ — единственная нетривиальная реберная подгруппа группы $G_{e(\varepsilon)}$, результирующий граф групп по-прежнему имеет тип (1).

Если среди групп G_v $(v \in V)$ есть хотя бы одна неединичная, то конечное число описанных преобразований приводит граф групп $\mathscr{G}(\Gamma)$ к требуемому виду.

В противном случае $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ — свободная группа с базисом $\{t_e \mid e \in E \setminus E_T\}$ и ее аппроксимируемость каждым корневым классом групп известна [20, теорема 1].

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) и для любой вершины $v \in V$ группа G_v $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе H_v;

2) $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (2) и для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$.

Группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все группы G_v $(v \in V)$ $\mathscr{C}$-аппроксимируемы и для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathscr{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.

Легко видеть, что если $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, Y — центральная подгруппа некоторой группы X и $X/Y \in \mathscr{C}$, то группа X $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе Y и последняя $\mathscr{C}$-отделима в группе X. Более содержательные примеры ситуаций, когда требования отделимости и регулярности из формулировок теорем 3 и 4 оказываются выполнены, дают приводимые далее следствия 3 и 4.

Пусть ρ — непустое множество простых чисел. Следуя [21], абелеву группу будем называть *ρ-ограниченной*, если в каждой ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части, соответствующие числам из множества ρ, конечны. Разрешимая (нильпотентная) группа называется *ρ-ограниченной*, если она обладает конечным субнормальным (соответственно центральным) рядом с ρ-ограниченными абелевыми факторами. Отметим, что если ρ включает все простые числа, то ρ-ограниченная разрешимая группа является *ограниченной разрешимой в смысле А. И. Мальцева* [17].

Если $\mathscr{C}$ — класс групп, состоящий из периодических групп, то через $\rho(\mathscr{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathscr{C}$. Напомним также, что подгруппа Y группы X называется *ρ'-изолированной* (в X) для заданного множества простых чисел ρ, если для любого элемента $x \in X$ и для любого простого числа $q \notin \rho$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

Следствие 3. *Пусть $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (1) или конечный граф групп типа (2). Пусть также $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и множество $\rho(\mathscr{C})$ включает всевозможные простые числа. Если все группы G_v $(v \in V)$ $\rho(\mathscr{C})$-ограниченные разрешимые, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Следствие 4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и все группы G_v $(v \in V)$ $\rho(\mathscr{C})$-ограниченные нильпотентные.*

1. Если $\mathscr{G}(\Gamma)$ — произвольный граф групп типа (1) и для каждой вершины $v \in V$ подгруппы 1 и H_v $\rho(\mathscr{C})'$-изолированы в группе G_v, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.

2. Пусть $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) или (2) и $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$. Группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппы 1 и $H_{\varepsilon e}$ $\rho(\mathscr{C})'$-изолированы в группе $G_{e(\varepsilon)}$.

Отметим, что в отличие от предыдущих утверждений следствия 3 и 4 не требуют замкнутости аппроксимирующего класса относительно взятия фактор-групп. Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству сформулированных теорем и следствий.

§ 3. Некоторые свойства фундаментальных групп рассматриваемых графов групп

Всюду далее если Γ' — непустой связный подграф графа Γ, то через $\mathscr{G}(\Gamma')$ будем обозначать граф групп, вершинам и ребрам которого сопоставлены те же группы и гомоморфизмы, что и в графе $\mathscr{G}(\Gamma)$. Нетрудно показать (см., например, [22]), что если граф $T' = \Gamma' \cap T$ является деревом и представление группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$ соответствует дереву T', то тождественное отображение образующих группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$ в группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ определяет инъективный гомоморфизм и потому группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$ можно считать подгруппой в $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$.

Пусть в каждой группе G_v $(v \in V)$ выбрана нормальная подгруппа R_v и $(R_{e(1)} \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1} = (R_{e(-1)} \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1}$ для любого ребра $e \in E$. Тогда будем называть семейство $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ *системой совместимых нормальных подгрупп* группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ и обозначать через $\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma)$ граф групп

$$(\Gamma,\ \overline{G}_v\ (v \in V),\ \overline{H}_e\ (e \in E),\ \overline{\varphi}_{\varepsilon e}\ (e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)),$$

в котором

$$\overline{G}_v = G_v/R_v, \quad \overline{H}_e = H_e/(R_{e(1)} \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1} = H_e/(R_{e(-1)} \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1}$$

и гомоморфизм $\overline{\varphi}_{\varepsilon e}\colon \overline{H}_e \to \overline{G}_{e(\varepsilon)}$ $(e \in E,\ \varepsilon = \pm 1)$ переводит смежный класс $\overline{h}$ $(h \in H_e)$ в элемент $(h\varphi_{\varepsilon e})R_{e(\varepsilon)}$. Будем предполагать, что представление группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ соответствует тому же дереву T. Легко видеть, что тогда тождественное отображение образующих группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ в группу $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ определяет сюръективный гомоморфизм, ядром которого служит нормальное замыкание в группе $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ множества $\bigcup\limits_{v \in V} R_v$. Этот гомоморфизм обозначим через $\rho_{\mathscr{R}}$.

Пусть $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (1), $F \subseteq E$ и $R_v = \prod\limits_{(e,\varepsilon) \in \Theta_v,\, e \in F} H_{\varepsilon e}$ для каждой вершины $v \in V$ (произведение пустого множества подгрупп предполагается равным 1). Тогда семейство $\{R_v \mid v \in V\}$ будем обозначать через $\mathscr{R}(F)$. Легко видеть, что оно является системой совместимых нормальных подгрупп группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ и граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}(F)}(\Gamma)$ имеет тип (1).

Предложение 1. *Пусть $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1). *Тогда для каждого элемента $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ найдется конечное множество ребер F_g такое, что $g\rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)} \neq 1$ и для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ из соотношения $g \notin H_{\varepsilon e}$ следует, что $g\rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)} \notin H_{\varepsilon e}\rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $g \in \pi_1(\mathscr{G}(T)) \setminus \{1\}$. Тогда $g \in \pi_1(\mathscr{G}(T'))$ для некоторого конечного поддерева T' дерева T. Воспользуемся индукцией по числу k вершин в дереве T'.

Пусть $k = 1$, т. е. $g \in G_v$ для некоторой вершины $v \in V$. Если $g \notin H_v$, то положим $F_g = \varnothing$. В противном случае $g \in \operatorname{sgp}\{H_{\varepsilon e} \mid (e,\varepsilon) \in \vartheta\}$ для некоторого конечного подмножества $\vartheta \subseteq \Theta_v$ и $F_g = \{e \mid (e,\varepsilon) \in \vartheta\}$. Легко видеть, что определенное таким образом множество F_g искомое.

Пусть $k > 1$ и для элементов группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, принадлежащих поддеревьям с меньшим числом вершин, утверждение предложения имеет место. Возьмем произвольное ребро e дерева T' и представим группу $\pi_1(\mathscr{G}(T'))$ в виде свободного произведения групп $\pi_1(\mathscr{G}(T'_1))$ и $\pi_1(\mathscr{G}(T'_{-1}))$ с объединенными подгруппами H_{+e} и H_{-e} (здесь T'_ε ($\varepsilon = \pm 1$) — содержащая вершину $e(\varepsilon)$ компонента связности графа, получающегося из T' путем удаления ребра e). Пусть $g = g_1 \dots g_n$ — несократимая запись элемента g в указанном обобщенном свободном произведении (определения и используемые здесь свойства несократимых и приведенных записей элементов обобщенных свободных произведений и HNN-расширений можно найти, например, в [3]). Если $n = 1$, то существование искомого множества F_g следует из индуктивного предположения. Пусть $n > 1$. Тогда по индуктивному предположению для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ найдется конечное множество $F_{g_i} \subseteq E$ такое, что если $g_i \notin H_{\varepsilon e}$ ($\varepsilon = \pm 1$), то $g_i \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_{g_i})} \notin H_{\varepsilon e} \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_{g_i})}$. Положим $F_g = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_{g_i}$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ справедливо соотношение $\ker \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)} \leq \ker \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_{g_i})}$, поэтому если $g_i \notin H_{\varepsilon e}$ ($\varepsilon = \pm 1$), то $g_i \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)} \notin H_{\varepsilon e} \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)}$. Следовательно, элемент $g \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)}$ имеет в группе $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)}(T))$, рассматриваемой как свободное произведение с объединенными подгруппами $H_{+e} \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)}$ и $H_{-e} \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)}$, несократимую запись длины $n > 1$ и, стало быть, не принадлежит свободным множителям этого произведения, содержащим все реберные подгруппы группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)}(\Gamma))$. Таким образом, множество F_g искомое.

Пусть g — произвольный неединичный элемент группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, рассматриваемой как HNN-расширение группы $\pi_1(\mathscr{G}(T))$, $g = g_0 t_{e_1}^{\varepsilon_1} g_1 \dots t_{e_n}^{\varepsilon_n} g_n$ — его приведенная запись. Воспользуемся индукцией по n. Если $n = 0$, то $g \in \pi_1(\mathscr{G}(T))$ и требуемое утверждение уже доказано. Пусть $n > 0$. По индуктивному предположению для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, если $g_i \notin H_{-\varepsilon_i e_i}$, то существует множество $F_{g_i} \subseteq E$ такое, что $g_i \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_{g_i})} \notin H_{-\varepsilon_i e_i} \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_{g_i})}$. Положим $F_{g_i} = \varnothing$, если $g_i \in H_{-\varepsilon_i e_i}$, и $F_g = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_{g_i}$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ из соотношения $g_i \notin H_{-\varepsilon_i e_i}$ вытекает, что $g_i \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)} \notin H_{-\varepsilon_i e_i} \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)}$. Следовательно, элемент $g \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)}$ имеет в HNN-расширении $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)}(\Gamma))$ приведенную запись длины $n > 0$ и потому не принадлежит базовой группе $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)}(T))$ этого HNN-расширения, содержащей все реберные подгруппы. Таким образом, определенное выше множество F_g искомое.

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1). *Тогда для каждого элемента $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ найдется конечный подграф $\Gamma' = (V', E')$ графа Γ такой, что граф $\Gamma' \cap T$ является деревом, $g \rho_{\mathscr{R}(E \setminus E')} \in \pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus E')}(\Gamma')) \setminus \{1\}$, граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus E')}(\Gamma')$ имеет тип* (1) *и подгруппа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus E')}(\Gamma'))$ служит ретрактом группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus E')}(\Gamma))$.*

Доказательство. Пусть $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ и w — некоторое слово от образующих группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, задающее элемент g. Определим подмножества $V_g \subseteq V$ и $E_g \subseteq E \setminus E_T$ следующим образом: $v \in V_g$ тогда и только тогда, когда слово w содержит некоторый образующий группы G_v или обратный к нему; $e \in E_g$ тогда и только тогда, когда в слово w входит символ t_e или t_e^{-1}.

Согласно предложению 1 найдется конечное множество ребер F_g такое, что $g \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)} \neq 1$. Пусть T' — конечное поддерево дерева T, содержащее все вершины из множества $V_g \cup \{e(\varepsilon) \mid e \in E_g \cup F_g,\ \varepsilon = \pm 1\}$, Γ' — подграф графа Γ, получающийся путем добавления к дереву T' всех ребер из множества $E_g \cup F_g$, V' и E' — множества вершин и ребер графа Γ' соответственно. Тогда $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$ и $g \rho_{\mathscr{R}(E \setminus E')} \in \pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus E')}(\Gamma'))$. Так как $F_g \subseteq E'$, то $\ker \rho_{\mathscr{R}(E \setminus E')} \leq \ker \rho_{\mathscr{R}(E \setminus F_g)}$ и потому $g \rho_{\mathscr{R}(E \setminus E')} \neq 1$.

По определению системы подгрупп $\mathscr{R}(E \setminus E') = \{R_v \mid v \in V\}$ для каждой вершины $v \in V \setminus V'$ справедливо равенство $R_v = H_v$. Поэтому группа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E\setminus E')}(\Gamma))$ изоморфна свободному произведению группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E\setminus E')}(\Gamma'))$, групп G_v/R_v $(v \in V \setminus V')$ и свободной группы с множеством порождающих $\{t_e \mid e \in E \setminus E'\}$. Следовательно, группа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E\setminus E')}(\Gamma'))$ является ретрактом группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E\setminus E')}(\Gamma))$. Тот факт, что граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E\setminus E')}(\Gamma')$ имеет тип (1), как уже отмечено выше, вытекает из определения системы $\mathscr{R}(E \setminus E')$.

§ 4. Доказательство теорем 1 и 2

Для любого графа групп $\mathscr{G}(\Gamma)$ формально можно рассмотреть группу

$$\mathrm{GDP}(\mathscr{G}(\Gamma)) = \langle G_v\ (v \in V);\ H_{+e} = H_{-e}\ (e \in E),\ [G_v, G_w] = 1\ (v, w \in V,\ v \neq w)\rangle,$$

образующими которой служат образующие групп G_v $(v \in V)$, а определяющими соотношениями — соотношения групп G_v $(v \in V)$, а также всевозможные соотношения вида $h_e\varphi_{+e} = h_e\varphi_{-e}$ $(e \in E,\ h_e \in H_e)$ и $[g_v, g_w] = 1$ $(v, w \in V,\ v \neq w)$, где g_v и g_w — произвольные слова в образующих групп G_v и G_w соответственно, $h_e\varphi_{\varepsilon e}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ — слово в образующих группы $G_{e(\varepsilon)}$, задающее образ элемента h_e относительно гомоморфизма $\varphi_{\varepsilon e}$. Очевидно, что группа $\mathrm{GDP}(\mathscr{G}(\Gamma))$ является гомоморфным образом группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$; ее свойства подробно рассматривались в [1]. Здесь потребуется лишь

Предложение 3. *Пусть граф Γ не содержит кратных ребер и петель, граф групп $\mathscr{G}(\Gamma)$ имеет тип* (1) *или* (2). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для каждой вершины $v \in V$ тождественное отображение образующих группы G_v в группу $\mathrm{GDP}(\mathscr{G}(\Gamma))$ определяет инъективный гомоморфизм, и потому естественный гомоморфизм $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) \to \mathrm{GDP}(\mathscr{G}(\Gamma))$ действует инъективно на всех группах G_v $(v \in V)$.*

2. *$\mathrm{GDP}(\mathscr{G}(\Gamma))$ является группой без кручения, если все группы G_v $(v \in V)$ не имеют кручения и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) *$\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1) *и для каждой вершины $v \in V$ подгруппа H_v изолирована в группе G_v;*

б) *$\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (2) *и для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Доказательство. Данное утверждение вытекает из теорем 1 и 2 работы [1]. Следует лишь отметить, что в теореме 2 из [1], где речь идет о графе групп типа (1), требуется изолированность в группе G_v произведения любого числа подгрупп из семейства $\{H_{\varepsilon e} \mid (e, \varepsilon) \in \Theta_v\}$. Ввиду приводимого далее предложения 6 это равносильно изолированности подгруппы H_v.

Предложение 4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1), (2) *или* $(3)_{+\mathscr{C}}$ *и прямое произведение D групп G_v $(v \in V)$ принадлежит классу $\mathscr{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, действующий инъективно на всех группах G_v $(v \in V)$.*

2. *Указанный гомоморфизм σ можно выбрать так, чтобы его образ был группой без кручения, если все группы G_v $(v \in V)$ не имеют кручения и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) *$\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа* (1) *и для каждой вершины $v \in V$ подгруппа H_v изолирована в группе G_v;*

б) $\mathscr{G}(\Gamma)$ — *граф групп типа* (2) *или* $(3)_{+\mathscr{C}}$ *и для любых* $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ *подгруппа* $H_{\varepsilon e}$ *изолирована в группе* $G_{e(\varepsilon)}$.

Доказательство. Пусть $E' = \{e \in E \setminus E_T \mid H_{+e} = 1 = H_{-e}\}$ и граф Γ' получается из Γ путем удаления всех ребер из множества E'. Тогда группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ представляет собой свободное произведение группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$ и свободной группы с базисом $\{t_e \mid e \in E'\}$. Понятно, что предложение достаточно доказать для группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma'))$, поэтому далее предполагается, что $E' = \varnothing$. Заметим еще, что если все группы G_v $(v \in V)$ тривиальны, то утверждение предложения выполняется очевидным образом и, стало быть, данный случай можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Группа $\mathrm{GDP}(\mathscr{G}(T))$ принадлежит классу $\mathscr{C}$ как гомоморфный образ группы D. Значит, если $\Gamma = T$, то в силу предложения 3 естественный гомоморфизм $\eta\colon \pi_1(\mathscr{G}(T)) \to \mathrm{GDP}(\mathscr{G}(T))$ искомый. Далее будем считать, что $\Gamma \neq T$ и потому $E \setminus E_T \neq \varnothing$.

Так как класс $\mathscr{C}$ содержит хотя бы одну неединичную группу и замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, то ему принадлежит некоторая циклическая группа $\mathscr{Z}$, порядок которой можно считать большим 2, если $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп, и равным бесконечности в противном случае. Пусть z — некоторый фиксированный порождающий группы $\mathscr{Z}$ и $\mathscr{I}$ — множество всех функций из $E \setminus E_T$ в $\mathscr{Z}$ с поточечным умножением (т. е. декартова степень группы $\mathscr{Z}$, показатель которой равен мощности множества $E \setminus E_T$). Пусть также $\mathscr{G}(T)_i$ $(i \in \mathscr{I})$ — изоморфная копия графа групп $\mathscr{G}(T)$, $\tau_i\colon \mathscr{G}(T) \to \mathscr{G}(T)_i$ — соответствующий изоморфизм (его ограничения на группы G_v $(v \in V)$ будем считать изоморфизмами групп) и Σ — дизъюнктное объединение графов $\mathscr{G}(T)_i$ $(i \in \mathscr{I})$. Для любых $i \in \mathscr{I}$, $e \in E \setminus E_T$

— определим функцию $j \in \mathscr{I}$ по правилу

$$j(e) = i(e)z^{-1}; \quad j(e') = i(e'), \quad e' \in E \setminus (E_T \cup \{e\});$$

— соединим новым ребром f вершины $e(1)\tau_i$ и $e(-1)\tau_j$ графа Σ;

— сопоставим ребру f группу H_e и гомоморфизмы $\psi_{+f} = \varphi_{+e}\tau_i$, $\psi_{-f} = \varphi_{-e}\tau_j$.

Полученный в результате граф групп обозначим через Δ. Заметим, что если считать его подграфы $\mathscr{G}(T)_i$ $(i \in \mathscr{I})$ макровершинами, то при $|\mathscr{Z}| = \infty$ соответствующий макрограф представляет собой целочисленную решетку в пространстве размерности $\mathfrak{c} = \operatorname{card} E \setminus E_T$, а при $|\mathscr{Z}| < \infty$ — $\mathfrak{c}$-мерный «целочисленный тор», получающийся отождествлением указанной решетки с каждым ее образом относительно сдвига вдоль некоторой координатной оси на расстояние, кратное $|\mathscr{Z}|$.

Из определения графа групп Δ сразу же следует, что если $\mathscr{G}(\Gamma)$ имеет тип (1), то Δ также имеет тип (1) и в силу выбора порядка группы $\mathscr{Z}$ не содержит кратных ребер и петель. Пусть $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа $(3)_{+\mathscr{C}}$. Тогда множество $E \setminus E_T$ состоит в точности из одного ребра, класс $\mathscr{C}$ содержит непериодические группы и $\mathscr{Z}$ — бесконечная циклическая группа. Отсюда следует, что описанный выше макрограф представляет собой бесконечную цепь и потому Δ имеет тип (2). Таким образом, в обоих случаях согласно предложению 3 все вершинные группы $G_v\tau_i$ $(v \in V,\ i \in \mathscr{I})$ графа групп Δ вкладываются в группу $\mathrm{GDP}(\Delta)$ посредством тождественного отображения образующих и, стало быть, их можно считать подгруппами последней. Заметим еще, что если граф групп $\mathscr{G}(\Gamma)$ удовлетворяет условию утверждения 2, то Δ также удовлетворяет данному условию и в силу того же предложения 3 группа $\mathrm{GDP}(\Delta)$ не имеет кручения.

Легко видеть, что для каждого $i \in \mathscr{I}$ отображение образующих группы $\mathrm{GDP}(\Delta)$, продолжающее изоморфизмы $\tau_j^{-1}\tau_{j\cdot i}$ $(j \in \mathscr{I})$, задает автоморфизм α_i этой группы (здесь $j\cdot i$ обозначает поточечное произведение функций j и i). Значит, определено полупрямое произведение $X = \mathrm{GDP}(\Delta)\rightthreetimes\mathscr{I}$, в котором внутренний автоморфизм, производимый элементом $i \in \mathscr{I}$, действует на $\mathrm{GDP}(\Delta)$ как α_i (отметим, что группа X очень похожа на прямое сплетение группы $\mathrm{GDP}(\mathscr{G}(T))$ с группой $\mathscr{I}$; разница лишь в том, что в качестве базы используется не обычное, а обобщенное прямое произведение изоморфных копий группы $\mathrm{GDP}(\mathscr{G}(T))$). Все группы G_v $(v \in V)$ принадлежат классу $\mathscr{C}$ как подгруппы группы D, и согласно сделанному предположению среди них есть хотя бы одна неединичная. Следовательно, если граф групп $\mathscr{G}(\Gamma)$ удовлетворяет условию утверждения 2, то класс $\mathscr{C}$ содержит непериодическую группу и потому группы $\mathscr{Z}$, $\mathscr{I}$ и X не имеют кручения.

Для каждого ребра $e \in E \setminus E_T$ определим функцию $\dot{e} \in \mathscr{I}$ по правилу: $\dot{e}(e) = z$, $\dot{e}(e') = 1$ для всех $e' \in E \setminus (E_T \cup \{e\})$. Пусть также $u \in \mathscr{I}$ — функция, тождественно равная 1. Непосредственно проверяется, что отображение слов в образующие группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$, действующее на образующих групп G_v $(v \in V)$ как изоморфизм τ_u и преобразующее каждый символ t_e $(e \in E\setminus E_T)$ в элемент $\dot{e}$, переводит все определяющие соотношения группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ в равенства, верные в группе X, и потому задает гомоморфизм $\sigma\colon \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) \to X$. Ввиду доказанного выше этот гомоморфизм инъективен на всех группах G_v $(v \in V)$. Таким образом, для завершения доказательства предложения остается показать, что $X \in \mathscr{C}$. Воспользуемся для этого замкнутостью класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп, фактор-групп, прямых произведений, расширений и декартовых степеней.

Если $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (3), то в множестве $E\setminus E_T$ имеется в точности одно ребро и потому $\mathscr{I} \cong \mathscr{Z} \in \mathscr{C}$. Пусть $\mathscr{G}(\Gamma)$ — граф групп типа (1). Согласно сделанному выше предположению $H_{+e} \neq 1 \neq H_{-e}$ для всех $e \in E \setminus E_T$ и, следовательно, каждому ребру $e \in E \setminus E_T$ однозначно соответствует пара подгрупп (H_{+e}, H_{-e}) группы D, т. е. подгруппа $\mathscr{C}$-группы $P = D \times D$. Значит, множество $E \setminus E_T$ может быть вложено в множество всех подмножеств группы P, которое в свою очередь вкладывается в принадлежащую классу $\mathscr{C}$ декартову степень $Q = P^{|P|}$. Отсюда $\mathscr{I} \leq \mathscr{Z}^{|Q|} \in \mathscr{C}$ и потому снова $\mathscr{I} \in \mathscr{C}$.

Группа $\mathrm{GDP}(\Delta)$ представляет собой гомоморфный образ прямого произведения $R = \prod\limits_{i\in\mathscr{I}} \mathrm{GDP}(\mathscr{G}(T)_i)$, все сомножители которого изоморфны группе $\mathrm{GDP}(\mathscr{G}(T))$. Как отмечено выше, $\mathrm{GDP}(\mathscr{G}(T)) \in \mathscr{C}$, и, поскольку $\mathscr{I} \in \mathscr{C}$, группа R вкладывается в принадлежащую классу $\mathscr{C}$ декартову степень $\mathrm{GDP}(\mathscr{G}(T))^{|\mathscr{I}|}$. Значит, $R \in \mathscr{C}$, $\mathrm{GDP}(\Delta) \in \mathscr{C}$ и $X \in \mathscr{C}$ как расширение $\mathscr{C}$-группы $\mathrm{GDP}(\Delta)$ при помощи $\mathscr{C}$-группы $\mathscr{I}$.

Предложение 5 [23, предложение 2]. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — произвольная группа. Тогда пересечение конечного числа подгрупп семейства $\mathscr{C}^*(X)$ снова является подгруппой данного семейства, и если группа X $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то для любой ее конечной подгруппы Y найдется подгруппа $Z \in \mathscr{C}^*(X)$ такая, что $Y \cap Z = 1$.*

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Предложение 6. *Пусть X — некоторая группа без кручения, Y и Z — центральные тривиально пересекающиеся подгруппы группы X. Если подгруппа YZ изолирована в группе X, то и подгруппа Z изолирована в X.*

Предложение 7. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений конечного числа сомножителей, $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$ — класс всех $\mathscr{C}$-групп без кручения. Пусть также X — некоторая группа, Y и Z — центральные подгруппы группы X, $Y \cap Z = 1$ и имеется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективный на подгруппе YZ. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует гомоморфизм $\overline{\sigma}$ группы X/Z на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективный на подгруппе YZ/Z.*

2. *Если группа X $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то и фактор-группа X/Z $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

3. *Пусть группа $X\sigma$ не имеет кручения, подгруппа $(YZ)\sigma$ изолирована в ней. Тогда*

а) *гомоморфизм $\overline{\sigma}$ можно выбрать так, чтобы группа $(X/Z)\overline{\sigma}$ не имела кручения и подгруппа $(YZ/Z)\overline{\sigma}$ была изолирована в ней;*

б) *если группа X $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируема, то и фактор-группа X/Z $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть $T = \ker \sigma$. Тогда $X/T \in \mathscr{C}$ и $T \cap YZ = 1$.

1. Заметим, что если $N \in \mathscr{C}^*(X)$, то группа

$$(X/Z)/(NZ/Z) \cong X/NZ \cong (X/N)/(NZ/N)$$

принадлежит классу $\mathscr{C}$ как фактор-группа $\mathscr{C}$-группы X/N. В частности, справедливо включение $(X/Z)/(TZ/Z) \in \mathscr{C}$. Из соотношения $T \cap YZ = 1$ следует, что $TZ/Z \cap YZ/Z = 1$. Поэтому естественный гомоморфизм группы X/Z на фактор-группу $(X/Z)/(TZ/Z)$ искомый.

2. Пусть $x \in X$ и $xZ \neq 1$. Если подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$ такова, что $x \notin NZ$, то $xZ \notin NZ/Z$ и $(X/Z)/(NZ/Z) \in \mathscr{C}$. Поэтому остается найти подгруппу N, обладающую указанным свойством. Если $x \notin TZ$, то подгруппа T искомая. Пусть $x = tz$ для некоторых $t \in T$, $z \in Z$. Так как $xZ \neq 1$, то $t \neq 1$ и, пользуясь $\mathscr{C}$-аппроксимируемостью группы X, можно найти подгруппу $M \in \mathscr{C}^*(X)$, не содержащую элемента t. Положим $N = M \cap T$. Тогда $N \in \mathscr{C}^*(X)$ по предложению 5 и, если $x = t'z'$ для некоторых $t' \in N$, $z' \in Z$, то из равенства $T \cap Z = 1$ получаем, что $t = t' \in N \leq M$ в противоречие с выбором подгруппы M. Следовательно, подгруппа N искомая.

3а. Поскольку

$$(X/Z)\overline{\sigma} = (X/Z)/(TZ/Z), \quad (YZ/Z)\overline{\sigma} = (YZT/Z)/(TZ/Z),$$

достаточно показать, что подгруппы YZT и TZ изолированы в группе X. Из равенств $T \cap YZ = 1$ и $Y \cap Z = 1$ следует, что подгруппа YZT представляет собой прямое произведение групп Y, Z и T. Так как подгруппа $(YZ)\sigma = YZT/T$ изолирована в группе $X\sigma = X/T$, подгруппа YZT изолирована в группе X и изолированность подгруппы TZ в этой группе вытекает из предложения 6.

3б. Рассуждение следует той же схеме, что и доказательство утверждения 2, нужно лишь выбрать подгруппу N так, чтобы выполнялось соотношение $(X/Z)/(NZ/Z) \in \mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$. Поскольку группа $X\sigma$ не имеет кручения и группа X $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируема, справедливо включение $T \in \mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}^*(X)$ и подгруппу M тоже можно считать принадлежащей семейству $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}^*(X)$. Согласно предложению 5 из замкнутости класса $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$ относительно взятия подгрупп и прямых произведений следует, что $N = M \cap T \in \mathscr{C}^*_{\mathfrak{tf}}(X)$. Ввиду соотношений $TZ/NZ \cong T/N(T \cap Z) = T/N$ подгруппа NZ изолирована в подгруппе TZ, последняя же, как доказано выше, изолирована в группе X. Таким образом, $(X/Z)/(NZ/Z) \cong X/NZ \in \mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$.

Предложение 8 [3, предложение 7]. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп. Если каждая группа G_v $(v \in V)$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема и существует гомоморфизм σ группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективный на всех подгруппах H_v $(v \in V)$, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ также $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Доказательство теорем 1 и 2. Сначала предположим, что прямое произведение D групп $G_v\sigma_v$ $(v \in V)$ принадлежит классу $\mathscr{C}$.

Пусть $S_v = \ker \sigma_v$ $(v \in V)$. Очевидно, что семейство $\mathscr{S} = \{S_v \mid v \in V\}$ является системой совместимых нормальных подгрупп и группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))\rho_{\mathscr{S}}$ удовлетворяет условию предложения 4. Поэтому композиция $\rho_{\mathscr{S}}$ и гомоморфизма из предложения 4 оказывается искомым отображением σ. Поскольку класс $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$ также корневой, аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ обеспечивается предложением 8.

Тем самым теорема 2 и утверждения 1 и 3а теоремы 1 доказаны полностью, а утверждения 2 и 3б — при условии, что $D \in \mathscr{C}$. Убедимся, что последние два утверждения справедливы и в отсутствие данного предположения.

Пусть $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma)) \setminus \{1\}$ — произвольный элемент. Согласно предложению 2 существует конечный подграф $\Gamma' = (V', E')$ графа Γ такой, что граф $\Gamma' \cap T$ является деревом, $g\rho_{\mathscr{R}(E \setminus E')} \in \pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus E')}(\Gamma')) \setminus \{1\}$, граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus E')}(\Gamma')$ имеет тип (1) и подгруппа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus E')}(\Gamma'))$ служит ретрактом группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus E')}(\Gamma))$.

Из определения системы подгрупп $\mathscr{R}(E \setminus E') = \{R_v \mid v \in V\}$ следует, что для каждой вершины $v \in V$ подгруппа R_v выделяется прямым множителем в группе H_v. Поэтому в силу предложения 7, применяемого к группе $X = G_v$, подгруппам $YZ = H_v$, $Z = R_v$ и гомоморфизму $\sigma = \sigma_v$:

а) существует гомоморфизм $\overline{\sigma}_v$ группы G_v/R_v на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективный на подгруппе H_v/R_v, и если группа G_v $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то и группа G_v/R_v $\mathscr{C}$-аппроксимируема;

б) если группа $G_v\sigma_v$ не имеет кручения и подгруппа $H_v\sigma_v$ изолирована в ней, то группа $(G_v/R_v)\overline{\sigma}_v$ и подгруппа $(H_v/R_v)\overline{\sigma}_v$ обладают теми же свойствами и из $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируемости группы G_v вытекает $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$-аппроксимируемость группы G_v/R_v.

Так как граф Γ' конечен, прямое произведение групп $(G_v/R_v)\overline{\sigma}_v$ $(v \in V')$ принадлежит классу $\mathscr{C}$. Следовательно, группа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus E')}(\Gamma'))$ аппроксимируется классом $\mathscr{C}$ или $\mathscr{C}_{\mathfrak{tf}}$ в силу доказанного выше. Таким образом, композиция отображения $\rho_{\mathscr{R}(E \setminus E')}$ и ретрактирующего гомоморфизма может быть продолжена до гомоморфизма группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ на $\mathscr{C}$-группу, переводящего g в неединичный элемент.

§ 5. Доказательство теорем 3 и 4

Систему $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ совместимых нормальных подгрупп назовем *$\mathscr{C}$-допустимой*, если существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективный на всех вершинных группах G_v/R_v $(v \in V)$. Основу доказательства теорем 3 и 4 составляют приведенное выше предложение 4 и следующее утверждение, вытекающее непосредственно из теорем 1–3 в [3].

Предложение 9. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный корневой класс групп и для любых $u \in V$, $L \in \mathscr{C}^*(G_u)$ существует $\mathscr{C}$-допустимая система совместимых нормальных подгрупп $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ такая, что $R_u \leq L$.*

1. Если все группы G_v $(v \in V)$ $\mathscr{C}$-аппроксимируемы и для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathscr{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.

2. Если $H_{\varepsilon e}$ — собственная центральная подгруппа группы $G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$, то верно и обратное: из $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ следует, что каждая группа G_v $(v \in V)$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема и для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathscr{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.

Предложение 10. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) и группа G_v $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе H_v для каждой вершины $v \in V$;

2) $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (2) и группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$ для всех $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$.

Тогда для любых $u \in V$, $L \in \mathscr{C}^*(G_u)$ существует $\mathscr{C}$-допустимая система совместимых нормальных подгрупп $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ такая, что $R_u \leq L$.

Доказательство. Пусть $u \in V$ и $L \in \mathscr{C}^*(G_u)$ — произвольная подгруппа. Укажем систему совместимых нормальных подгрупп $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in V\}$ такую, что $R_u \leq L$, $R_v \in \mathscr{C}^*(G_v)$ для всех $v \in V$ и граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma)$ имеет тот же тип, что и $\mathscr{G}(\Gamma)$. Поскольку граф Γ конечен, в этом случае прямое произведение $\mathscr{C}$-групп G_v/R_v $(v \in V)$ принадлежит классу $\mathscr{C}$ и согласно предложению 4 система $\mathscr{R}$ $\mathscr{C}$-допустима.

Сначала предположим, что выполняется условие 1. Для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$ определим подгруппу $L_{\varepsilon e} \leq H_{\varepsilon e}$ следующим образом. Если ребро e не является петлей и $u = e(\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, положим $L_{\varepsilon e} = L \cap H_{\varepsilon e}$ и $L_{-\varepsilon e} = L_{\varepsilon e}\varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e}$. Если e — петля и $e(-1) = u = e(1)$, то

$$L_{+e} = (L \cap H_{+e}) \cap (L \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1}\varphi_{+e},$$
$$L_{-e} = (L \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e} \cap (L \cap H_{-e}) = L_{+e}\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}.$$

В остальных случаях $L_{\varepsilon e} = H_{\varepsilon e}$.

Пусть $M_v = \prod\limits_{(e,\varepsilon)\in\Theta_v} L_{\varepsilon e}$ для каждой вершины $v \in V$. Так как $L \in \mathscr{C}^*(G_u)$, для любой пары $(e,\varepsilon) \in \Theta_u$ фактор-группа $H_{\varepsilon e}/L \cap H_{\varepsilon e}$ изоморфна подгруппе $\mathscr{C}$-группы G_u/L и потому $L \cap H_{\varepsilon e} \in \mathscr{C}^*(H_{\varepsilon e})$. Отсюда и из предложения 5 вытекает, что $L_{\varepsilon e} \in \mathscr{C}^*(H_{\varepsilon e})$ для всех $(e,\varepsilon) \in \Theta_u$. Поскольку $\mathscr{C}$ — непустой класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, ему принадлежит единичная группа и, следовательно, $L_{\varepsilon e} \in \mathscr{C}^*(H_{\varepsilon e})$ для всех остальных пар (e,ε). Значит, ввиду конечности графа Γ фактор-группа H_v/M_v представляет собой прямое произведение конечного числа $\mathscr{C}$-групп $H_{\varepsilon e}/L_{\varepsilon e}$ и потому $M_v \in \mathscr{C}^*(H_v)$ для всех $v \in V$.

Для каждой вершины $v \in V$, пользуясь $\mathscr{C}$-регулярностью группы G_v по подгруппе H_v, найдем подгруппу $R_v \in \mathscr{C}^*(G_v)$ такую, что $M_v = R_v \cap H_v$. Тогда $R_u \cap H_u = M_u \leq L$, и поскольку естественный гомоморфизм $G_v \to G_v/R_v$ продолжает естественный гомоморфизм $H_v \to H_v/M_v$, подгруппа H_vR_v/R_v представляет собой прямое произведение подгрупп $H_{\varepsilon e}R_v/R_v$ $((e,\varepsilon) \in \Theta_v)$. Таким образом, система $\{R_v \mid v \in V\}$ искомая.

Предположим, что выполняется условие 2. Для каждой вершины $v \in V$ определим подгруппу $R_v \in \mathscr{C}^*(G_v)$, используя индукцию по длине (единственного) пути, связывающего v с u. Положим $R_u = L$. Пусть $v \ne u$, e — инцидентное v ребро пути из v в u, $v = e(\varepsilon)$ ($\varepsilon = \pm 1$) и подгруппа $R_{e(-\varepsilon)} \in \mathscr{C}^*(G_{e(-\varepsilon)})$ уже определена. Тогда

$$R_{e(-\varepsilon)} \cap H_{-\varepsilon e} \in \mathscr{C}^*(H_{-\varepsilon e}), \quad (R_{e(-\varepsilon)} \cap H_{-\varepsilon e})\varphi_{-\varepsilon e}^{-1}\varphi_{\varepsilon e} \in \mathscr{C}^*(H_{\varepsilon e})$$

и ввиду $\mathscr{C}$-регулярности группы $G_{e(\varepsilon)} = G_v$ по подгруппе $H_{\varepsilon e}$ найдется подгруппа $R_v \in \mathscr{C}^*(G_v)$ такая, что $R_v \cap H_{\varepsilon e} = (R_{e(-\varepsilon)} \cap H_{-\varepsilon e})\varphi_{-\varepsilon e}^{-1}\varphi_{\varepsilon e}$. Понятно, что система $\{R_v \mid v \in V\}$ искомая.

Доказательство теоремы 4 немедленно следует из предложений 9 и 10.

Предложение 11 [23, предложение 3]. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, X — некоторая группа, Y — нормальная подгруппа группы X. Подгруппа Y $\mathscr{C}$-отделима в группе X тогда и только тогда, когда фактор-группа X/Y $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Предложение 12. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и фактор-групп, X — некоторая группа, Y, Z — центральные подгруппы группы X и $Y \cap Z = 1$. Пусть также группа X $\mathscr{C}$-аппроксимируема и $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе YZ, а подгруппа YZ $\mathscr{C}$-отделима в группе X. Тогда*

1) *подгруппа Z $\mathscr{C}$-отделима в группе X и фактор-группа X/Z $\mathscr{C}$-аппроксимируема;*

2) *группа X/Z $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе YZ/Z и подгруппа YZ/Z $\mathscr{C}$-отделима в группе X/Z.*

Доказательство. 1. Пусть $x \in X \setminus Z$ — произвольный элемент. Покажем, что существует подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$ такая, что $x \notin ZN$.

Если $x \notin YZ$, то в силу $\mathscr{C}$-отделимости подгруппы YZ найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$, удовлетворяющая условию $x \notin YZN$. Очевидно, что тогда $x \notin ZN$. Пусть $x = yz$ для некоторых $y \in Y$, $z \in Z$. Поскольку $x \notin Z$, элемент y отличен от 1 и ввиду $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы X не принадлежит некоторой подгруппе $L \in \mathscr{C}^*(X)$. Из условия $Y \cap Z = 1$ следует, что тогда $yz \notin (L \cap Y)Z$. Так как $YZ/(L \cap Y)Z \cong Y/L \cap Y \cong YL/L \le X/L$ и класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то $(L \cap Y)Z \in \mathscr{C}^*(YZ)$. Поэтому ввиду $\mathscr{C}$-регулярности группы X по подгруппе YZ найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$ такая, что $N \cap YZ = (L \cap Y)Z$. Тогда $yz \notin N$ и $Z \le N$, откуда $x = yz \notin ZN$.

Таким образом, подгруппа Z $\mathscr{C}$-отделима в группе X и по предложению 11 фактор-группа X/Z $\mathscr{C}$-аппроксимируема.

2. Пусть $M/Z \in \mathscr{C}^*(YZ/Z)$ — произвольная подгруппа. Тогда $M \in \mathscr{C}^*(YZ)$ и в силу $\mathscr{C}$-регулярности группы X по подгруппе YZ найдется такая подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$, что $N \cap YZ = M$. Отсюда легко следует, что $N/Z \in \mathscr{C}^*(X/Z)$ и $N/Z \cap YZ/Z = M/Z$. Таким образом, группа X/Z $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе YZ/Z. Остается заметить, что согласно предложению 11 $\mathscr{C}$-отделимость подгруппы YZ в группе X равносильна $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $X/YZ \cong (X/Z)/(YZ/Z)$, которая, в свою очередь, равносильна $\mathscr{C}$-отделимости подгруппы YZ/Z в группе X/Z.

Доказательство теоремы 3. Согласно предложению 2 для заданного элемента $g \in \pi_1(\mathscr{G}(\Gamma) \setminus \{1\}$ найдется конечный подграф $\Gamma' = (V', E')$ графа Γ такой, что граф $\Gamma' \cap T$ является деревом, $g\rho_{\mathscr{R}(E \setminus E')} \in \pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E \setminus E')}(\Gamma')) \setminus \{1\}$, граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E\setminus E')}(\Gamma')$ имеет тип (1) и подгруппа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E\setminus E')}(\Gamma'))$ служит ретрактом группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E\setminus E')}(\Gamma))$. Из определения системы $\mathscr{R}(E\setminus E') = \{R_v \mid v \in V\}$ вытекает, что для каждой вершины $v \in V$ подгруппа R_v выделяется в группе H_v прямым множителем, а группа H_v/R_v представляет собой прямое произведение подгрупп $H_{\varepsilon e}R_v/R_v$ $((e,\varepsilon) \in \Theta_v)$. Поэтому согласно предложению 12 группа G_v/R_v $\mathscr{C}$-аппроксимируема и $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе H_v/R_v, а подгруппа H_v/R_v $\mathscr{C}$-отделима в группе G_v/R_v. Перечисленные свойства в силу того же предложения 12 влекут за собой $\mathscr{C}$-отделимость в группе G_v/R_v всех прямых множителей $H_{\varepsilon e}R_v/R_v$ $((e,\varepsilon) \in \Theta_v)$ подгруппы H_v/R_v. Таким образом, группа $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}(E\setminus E')}(\Gamma'))$ удовлетворяет условиям теоремы 4 и потому $\mathscr{C}$-аппроксимируема. Отсюда следует, что композиция отображения $\rho_{\mathscr{R}(E\setminus E')}$ и ретрактирующего гомоморфизма может быть продолжена до гомоморфизма группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, переводящего g в неединичный элемент.

§ 6. Доказательство следствий

Доказательство следствия 1. Легко видеть, что классы всех разрешимых групп $\mathscr{S}$ и периодических разрешимых ρ-групп конечного периода $\mathscr{PS}_\rho$ являются корневыми и замкнуты относительно взятия фактор-групп. Так как ступени разрешимости и периоды групп G_v $(v \in V)$ ограничены в совокупности, их прямое произведение принадлежит классу $\mathscr{S}$ или $\mathscr{PS}_\rho$ в зависимости от того, какое утверждение следствия рассматривается. Поэтому аппроксимируемость группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ вытекает из теорем 1 и 2.

Доказательство следствия 2. Заметим, что каждая группа G_v $(v \in V)$ обладает гомоморфизмом σ_v на группу из класса $\mathscr{C}$, инъективным на подгруппе H_v: если $G_v \in \mathscr{C}$, то σ_v — тождественное отображение группы G_v; в остальных двух случаях его существование обеспечивается предложением 5 и предложением 11 из [24] соответственно. Если граф Γ конечен, то прямое произведение групп $G_v\sigma_v$ $(v \in V)$ принадлежит классу $\mathscr{C}$. Значит, снова можно воспользоваться теоремами 1 и 2.

Предложение 13. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Класс $\mathscr{C}$ содержит все конечные разрешимые $\rho(\mathscr{C})$-группы* [25, предложение 10].
2. *Каждая группа из класса $\mathscr{C}$ имеет конечный период* [23, предложение 17].
3. *Если класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то любая $\rho(\mathscr{C})$-ограниченная разрешимая $\mathscr{C}$-группа конечна* [23, предложение 18].

Предложение 14. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и множество $\rho(\mathscr{C})$ содержит все простые числа. Тогда в произвольной $\rho(\mathscr{C})$-ограниченной разрешимой группе все подгруппы $\mathscr{C}$-отделимы.*

Доказательство. Пусть X — $\rho(\mathscr{C})$-ограниченная разрешимая группа, Y — произвольная подгруппа группы X. Согласно теореме 6 из [17] подгруппа Y финитно отделима в группе X. Поскольку любой гомоморфный образ группы X является разрешимой группой, подгруппа Y оказывается отделимой в ней классом $\mathscr{FS}$ всех конечных разрешимых групп. Согласно предложению 13 $\mathscr{FS} \subseteq \mathscr{C}$. Значит, подгруппа Y $\mathscr{C}$-отделима.

Следующее утверждение получается путем объединения предложений 5 и 8 из [24].

Предложение 15. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, X — $\rho(\mathscr{C})$-ограниченная нильпотентная группа. Подгруппа группы X $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она $\rho(\mathscr{C})'$-изолирована в ней.*

Предложение 16. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп, X — $\rho(\mathscr{C})$-ограниченная разрешимая группа и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) *множество $\rho(\mathscr{C})$ содержит все простые числа;*
2) *группа X $\rho(\mathscr{C})$-ограниченная нильпотентная.*

Тогда группа X $\mathscr{C}$-регулярна по любой своей центральной подгруппе Y.

Доказательство. Пусть $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ — произвольная подгруппа, $\overline{X} = X/M$ и $\overline{Y} = Y/M$. Укажем подгруппу $\overline{N} = N/M$, удовлетворяющую условиям $\overline{N} \in \mathscr{C}^*(\overline{X})$ и $\overline{N} \cap \overline{Y} = 1$. Тогда $N \in \mathscr{C}^*(X)$ и $N \cap Y = M$.

Так как классы $\mathscr{BS}_{\rho(\mathscr{C})}$ и $\mathscr{BN}_{\rho(\mathscr{C})}$ $\rho(\mathscr{C})$-ограниченных разрешимых групп и $\rho(\mathscr{C})$-ограниченных нильпотентных групп замкнуты относительно взятия подгрупп и фактор-групп [21, предложение 2], то $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathscr{BS}_{\rho(\mathscr{C})}$ и согласно предложению 13 $\mathscr{C}$-группа $\overline{Y}$ конечна. Если множество $\rho(\mathscr{C})$ содержит все простые числа, то по предложению 14 группа $\overline{X}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема и существование искомой подгруппы $\overline{N}$ обеспечивается предложением 5.

Пусть $X \in \mathscr{BN}_{\rho(\mathscr{C})}$ и $\overline{T}$ — множество элементов группы $\overline{X}$ такое, что $x \in \overline{T}$ тогда и только тогда, когда порядок элемента x конечен и не делится ни на одно число из множества $\rho(\mathscr{C})$. Тогда $\overline{T}$ — нормальная подгруппа группы $\overline{X}$ [26, § 4], $\overline{X}/\overline{T} \in \mathscr{BN}_{\rho(\mathscr{C})}$ ввиду отмеченных выше свойств класса $\mathscr{BN}_{\rho(\mathscr{C})}$ и $\overline{T} \cap \overline{Y} = 1$, поскольку подгруппа $\overline{Y}$ принадлежит классу $\mathscr{C}$, конечна и, следовательно, является $\rho(\mathscr{C})$-группой. Так как единичная подгруппа группы $\overline{X}/\overline{T}$ $\rho(\mathscr{C})'$-изолирована, по предложению 15 эта группа $\mathscr{C}$-аппроксимируема. Отсюда в силу предложения 5 вытекает существование подгруппы $\overline{N}/\overline{T} \in \mathscr{C}^*(\overline{X}/\overline{T})$, удовлетворяющей соотношению $\overline{N}/\overline{T} \cap \overline{Y}\,\overline{T}/\overline{T} = 1$. Легко видеть, что тогда подгруппа $\overline{N}$ искомая.

Доказательство следствия 3. Если граф Γ конечен, то, производя описанные в § 2 преобразования, можно добиться выполнения соотношения $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для любых $e \in E$, $\varepsilon = \pm 1$. Понятно, что все вершинные группы при этом останутся $\rho(\mathscr{C})$-ограниченными разрешимыми. Класс $\mathscr{FS}$ всех конечных разрешимых групп является корневым, замкнут относительно взятия фактор-групп и ввиду предложения 13 содержится в $\mathscr{C}$. Согласно предложениям 14 и 16 для каждой вершины $v \in V$ группа G_v $\mathscr{FS}$-регулярна по любой своей центральной подгруппе и все подгруппы группы G_v $\mathscr{FS}$-отделимы. Значит, в силу теорем 3 и 4 группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{FS}$-аппроксимируема, а потому и $\mathscr{C}$-аппроксимируема.

Доказательство следствия 4. Пусть $\mathscr{C}_1$ обозначает класс конечных разрешимых $\rho(\mathscr{C})$-групп, $\mathscr{C}_2$ — класс периодических $\rho(\mathscr{C})$-групп конечного периода. Легко видеть, что классы $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ корневые и замкнуты относительно взятия фактор-групп. Поэтому в силу теорем 3, 4 и предложений 15, 16 для них утверждение следствия справедливо.

Из предложения 13 вытекает, что $\mathscr{C}_1 \subseteq \mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}_2$. Очевидно также, что $\rho(\mathscr{C}_1) = \rho(\mathscr{C}) = \rho(\mathscr{C}_2)$. Поэтому если выполнены условия $\rho(\mathscr{C})'$-изолированности подгрупп из формулировки доказываемого следствия, то группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$

аппроксимируется классом $\mathscr{C}_1$, а значит, и классом $\mathscr{C}$. И наоборот, если группа $\pi_1(\mathscr{G}(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то она $\mathscr{C}_2$-аппроксимируема и удовлетворяет упомянутым условиям $\rho(\mathscr{C})'$-изолированности подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 6. С. 720–740.

2. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений с центральными объединенными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 692–702.

3. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.

4. *Shirvani M.* On residually finite graph products // J. Pure Appl. Algebra. 1987. V. 49, N 3. P. 281–282.

5. *Varsos D.* The residual nilpotence of the fundamental group of certain graphs of groups // Houston J. Math. 1996. V. 22, N 2. P. 233–248.

6. *Levitt G.* Quotients and subgroups of Baumslag–Solitar groups // J. Group Theory. 2015. V. 18, N 1. P. 1–43.

7. *Sokolov E. V.* Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups // J. Algebra. 2021. V. 582. P. 1–25.

8. *Dudkin F. A.* $\mathscr{F}_\pi$-residuality of generalized Baumslag–Solitar groups // Arch. Math. 2020. V. 114. P. 129–134.

9. *Raptis E., Talelli O., Varsos D.* On residual finiteness of graphs of nilpotent groups // Int. J. Algebra Comput. 2004. V. 14, N 4. P. 403–408.

10. *Sokolov E. V., Tumanova E. A.* To the question of the root-class residuality of free constructions of groups // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, N 2. P. 260–272.

11. *Wise D. T.* The residual finiteness of negatively curved polygons of finite groups // Invent. Math. 2002. V. 149, N 3. P. 579–617.

12. *Kim G.* On the residual finiteness of fundamental groups of graphs of certain groups // J. Korean Math. Soc. 2004. V. 41, N 5. P. 913–920.

13. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, химия, физика, математика. 2002. № 3. С. 123–133.

14. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Биология, химия, физика, математика. 2003. № 3. С. 102–116.

15. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами HNN-расширений с центральными циклическими связанными подгруппами // Мат. заметки. 2017. Т. 102, № 4. С. 597–612.

16. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 3–13.

17. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49–60.

18. *Allenby R. B. J. T.* The potency of cyclically pinched one-relator groups // Arch. Math. 1981. V. 36. P. 204–210.

19. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп в некоторых классах конечных групп. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2003.

20. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. № 5. С. 6–10.

21. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.

22. *Bogopolski O.* Introduction to group theory. Zürich: Eur. Math. Soc., 2008.

23. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 2020. № 3. С. 48–63.

24. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.

25. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 219–229.

26. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.

Статья поступила 27 февраля 2021 г.
После доработки 9 июня 2021 г.
Принята к публикации 11 июня 2021 г.

Соколов Евгений Викторович
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
ev-sokolov@yandex.ru