

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП ГРАФОВ ГРУПП. I

Е. В. Соколов

Аннотация. Доказана теорема о структуре конечно порожденных абелевых подгрупп фундаментальной группы произвольного графа групп. Приводятся также некоторые вспомогательные результаты, необходимые для описания подгрупп указанного типа, отделимых корневым классом групп.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.514

Ключевые слова: фундаментальная группа графа групп, обобщенное свободное произведение, HNN-расширение, структурная теорема для абелевых подгрупп.

§ 1. Введение

Настоящая статья служит первой частью работы, посвященной изучению делимости корневыми классами групп конечно порожденных абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. Непосредственно об делимости и корневых классах речь пойдет во второй части. Задача данной статьи состоит в описании внутреннего устройства конечно порожденных абелевых подгрупп фундаментальной группы произвольного графа групп. Кроме того, следует отметить, что большая часть доказанных в ней вспомогательных утверждений используется также и во второй части работы.

Насколько известно автору, результатов, из которых можно было бы легко вывести описание абелевых подгрупп фундаментальной группы произвольного графа групп, не публиковалось. Полностью вопрос о строении подгрупп (не только абелевых) решен лишь для трех свободных конструкций: обычного свободного произведения семейства групп [1], обобщенного свободного произведения двух групп [2] и HNN-расширения с семейством проходных букв [3]. Незадолго до выхода работ [2, 3] Д. И. Молдавский [4] дал прямое доказательство утверждений, описывающих абелевы подгруппы обобщенного свободного произведения двух групп и HNN-расширения с одной проходной буквой (см. предложение 4 ниже). Именно это описание используется в настоящей статье для получения основного результата. Чтобы сформулировать последний, приведем ряд определений и обозначений, действующих до конца изложения.

Пусть Γ — непустой неориентированный связный граф с множеством вершин \mathcal{V} и множеством ребер \mathcal{E} (допускаются петли и кратные ребра). Выбирая произвольным образом направления для всех ребер графа Γ , обозначая вершины, являющиеся концами ребра $e \in \mathcal{E}$, через $e(1)$, $e(-1)$ и сопоставляя каждой вершине $v \in \mathcal{V}$ некоторую группу G_v , а каждому ребру $e \in \mathcal{E}$ — группу H_e

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00166, <https://rscf.ru/project/22-21-00166/>.

и инъективные гомоморфизмы $\varphi_{+e}: H_e \rightarrow G_{e(1)}, \varphi_{-e}: H_e \rightarrow G_{e(-1)}$, получим ориентированный граф групп

$$\mathcal{G}(\Gamma) = (\Gamma, G_v (v \in \mathcal{V}), H_e (e \in \mathcal{E}), \varphi_{\varepsilon e} (e \in \mathcal{E}, \varepsilon = \pm 1)).$$

Будем называть группы $G_v (v \in \mathcal{V})$ и подгруппы $H_e\varphi_{+e}, H_e\varphi_{-e} (e \in \mathcal{E})$ соответственно *вершинными* и *реберными*. Последние для краткости будем обозначать через H_{+e} и H_{-e} .

Выберем некоторое максимальное дерево \mathcal{T} в графе Γ , обозначим через $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ множество его ребер и рассмотрим представление

$$\left\langle \begin{array}{l} G_v (v \in \mathcal{V}), \\ t_e (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}}) \end{array} \middle| \begin{array}{l} H_{+e} = H_{-e} (e \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}), \\ t_e^{-1}H_{+e}t_e = H_{-e} (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}}) \end{array} \right\rangle,$$

образующими в котором являются образующие групп $G_v (v \in \mathcal{V})$ и символы $t_e (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}})$, а определяющими соотношениями — соотношения групп $G_v (v \in \mathcal{V})$ и всевозможные соотношения вида

$$\begin{aligned} h_e\varphi_{+e} &= h_e\varphi_{-e} \quad (e \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}, h_e \in H_e), \\ t_e^{-1}(h_e\varphi_{+e})t_e &= h_e\varphi_{-e} \quad (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}}, h_e \in H_e), \end{aligned}$$

где $h_e\varphi_{\varepsilon e} (\varepsilon = \pm 1)$ — слово в образующих группы $G_{e(\varepsilon)}$, задающее образ элемента h_e относительно гомоморфизма $\varphi_{\varepsilon e}$. Известно, что все представления описанного вида, соответствующие различным максимальным деревьям в графе Γ , определяют одну и ту же группу, которая называется *фундаментальной группой графа групп* $\mathcal{G}(\Gamma)$ и обычно обозначается через $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ [5, § 5.1]. Далее будем считать выбранное дерево \mathcal{T} фиксированным и использовать для группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ более короткое обозначение \mathfrak{G} .

Пусть (X, Y) — пара подгрупп группы \mathfrak{G} . Рассмотрим следующий набор условий:

- (λ) X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы $G_v (v \in \mathcal{V}), Y = 1$;
- (μ) X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы $H_{\varepsilon e} (e \in \mathcal{E}, \varepsilon = \pm 1), Y$ — бесконечная циклическая подгруппа и $[X, Y] = 1$;
- (μ_1) справедливо условие (μ) и $Y \cap G_{e(\varepsilon)} = 1$;
- (μ_2) справедливо условие (μ) и $g^{-1}Yg \cap G_v = 1$ для всех $g \in \mathfrak{G}, v \in \mathcal{V}$;
- (μ_3) справедливо условие (μ) и $g^{-1}xyg \notin G_v$ для всех $g \in \mathfrak{G}, v \in \mathcal{V}, x \in X, y \in Y \setminus \{1\}$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_k(\mathfrak{G}) (1 \leq k \leq 3)$ семейство всех пар подгрупп группы \mathfrak{G} , удовлетворяющих условию (λ) или (μ_k), и положим

$$\mathfrak{A}_k(\mathfrak{G}) = \{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}_k(\mathfrak{G})\}.$$

Теорема. Для произвольной подгруппы A группы \mathfrak{G} следующие четыре утверждения равносильны.

- k . Подгруппа A сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{G}) (1 \leq k \leq 3)$
- 4. A — конечно порожденная абелева подгруппа.

Из условий (μ_1)–(μ_3) наиболее естественно выглядит второе. Появление условия (μ_3) объясняется желанием доказать несколько большее теми же средствами. Условие (μ_1) используется во второй части работы для описания конечно порожденных абелевых подгрупп, отделимых корневым классом групп. Оставшаяся часть данной статьи посвящена доказательству сформулированной теоремы.

§ 2. Об обобщенных свободных произведениях и HNN-расширениях

Напомним, что если граф Γ состоит из двух вершин и соединяющего их ребра e , то группа \mathfrak{G} называется *обобщенным свободным произведением групп* $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ *с объединенными подгруппами* H_{+e} и H_{-e} . Если же граф Γ имеет только одну вершину v и петлю e в ней, то группу \mathfrak{G} называют *HNN-расширением группы* G_v *с проходной буквой* t_e *и связанными подгруппами* H_{+e} и H_{-e} , а группу G_v — *базовой группой* данного HNN-расширения (используемая в данной статье терминология, касающаяся обобщенных свободных произведений и HNN-расширений, следует монографии [6]). Далее будем считать, что

$$P = \langle B_1 * B_{-1}; H_1 = H_{-1} \rangle \quad \text{и} \quad E = \langle B_1 = B_{-1}, t; t^{-1}H_1t = H_{-1} \rangle$$

— соответственно обобщенное свободное произведение групп B_1, B_{-1} и HNN-расширение группы $B_1 = B_{-1}$ с объединенными/связанными подгруппами H_1 и H_{-1} (двойное обозначение базовой группы упрощает проведение доказательств одновременно для групп P и E). Представление элемента

- р) $x \in P$,
- е) $x \in E$

в виде произведения

- р) $b_1 \dots b_n$ ($n \geq 1$),
- е) $b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_n} b_n$ ($n \geq 0$)

называется *приведенной записью* этого элемента *длины* n , если

- р) $b_1, \dots, b_n \in B_1 \cup B_{-1}$ и никакие два соседних сомножителя b_i, b_{i+1} не лежат одновременно в группе B_1 или в группе B_{-1} ;
- е) $b_0, b_1, \dots, b_n \in B_1 = B_{-1}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ и для каждого $k \in \{1, \dots, n-1\}$ из равенства $\varepsilon_k = -\varepsilon_{k+1}$ следует, что $b_k \notin H_{-\varepsilon_k}$.

Уточним, что здесь и далее произведение $t^{\varepsilon_i} b_i \dots t^{\varepsilon_j} b_j$ принимается равным 1 при $i > j$. В частности, $b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_n} b_n = b_0$ при $n = 0$. Легко видеть, что, каким бы ни был элемент x , он обладает хотя бы одной записью указанного выше вида. Данную запись называют *циклически приведенной*, если

- р) n четно или равно 1;
- е) либо $n = 0$, либо $n > 0$, $b_0 = 1$ и из равенства $\varepsilon_n = -\varepsilon_1$ следует, что $b_n \notin H_{-\varepsilon_n}$.

Элемент x будем называть

- *циклически приведенным*, если он обладает хотя бы одной циклически приведенной записью;
- *примитивным*, если $x \in B_1 \cup B_{-1}$.

Из теорем о нормальной форме для обобщенных свободных произведений и HNN-расширений [6, гл. IV, теоремы 2.1, 2.6] вытекает, что все приведенные записи элемента x имеют одну и ту же длину (называемую далее *длиной* данного элемента) и потому элемент x непримитивен тогда и только тогда, когда его длина больше 1 (если $x \in P$) или 0 (если $x \in E$). Отсюда легко следует, что в группе P справедливо равенство $H_1 = B_1 \cap B_{-1} = H_{-1}$.

Всюду далее если X — некоторая группа, Y_1, Y_2 — ее подгруппы, то запись $Y_1 \times Y_2$ означает, что подгруппа $\text{sgp}\{Y_1, Y_2\}$ раскладывается в прямое произведение подгрупп Y_1 и Y_2 . Также через \sim_X будем обозначать отношение сопряженности в группе X , через $\langle x \rangle$ — циклическую подгруппу, порожденную элементом $x \in X$, и через $\ell(x)$ — длину элемента x (если $X = P$ или $X = E$).

Предложение 1 [6, гл. IV, теоремы 2.5, 2.8]. Пусть $X = P$ или $X = E$. Если $x, y \in X$ — сопряженные циклически приведенные элементы, хотя бы один из которых непримитивен, то $\ell(x) = \ell(y)$.

Предложение 2. Справедливы следующие утверждения.

I. Пусть $x \in P$ — непримитивный, не являющийся циклически приведенным элемент и $b_1 b_2 \dots b_n$ ($n \geq 3$) — некоторая его приведенная запись. Тогда существуют элемент $a \in B_1 \cup B_{-1}$ и число m ($1 \leq m \leq \frac{n-1}{2}$) такие, что

- а) элемент $u = b_{m+1} \dots b_{n-m} a$ не лежит в подгруппе $H_1 = H_{-1}$;
- б) если $\ell(u) = 1$, то $a \in H_1 = H_{-1}$;
- в) если $\ell(u) > 1$, то $a \notin H_1 = H_{-1}$ и произведение $b_{m+1} \dots b_{n-m} a$ является циклически приведенной записью элемента u ;
- г) произведение

$$b_1 \dots b_m b_{m+1} \dots b_{n-m} d b_{m-1}^{-1} \dots b_1^{-1},$$

где $d = a b_m^{-1}$, служит приведенной записью элемента x .

Как следствие:

- 1) $x = v u v^{-1}$, где $v = b_1 \dots b_m$;
- 2) если элемент u примитивен, то $u = b_{m+1} a$ и $b_1 \dots b_m u b_m^{-1} \dots b_1^{-1}$ — приведенная запись элемента x ;
- 3) если элемент u непримитивен, то для любого $q > 0$

$$b_1 \dots b_m (b_{m+1} \dots b_{n-m} a)^{q-1} b_{m+1} \dots b_{n-m} d b_{m-1}^{-1} \dots b_1^{-1}$$

— приведенная запись элемента $x^q = v u^q v^{-1}$ длины $q\ell(u) + 2\ell(v) - 1$.

II. Пусть $x \in E$ — непримитивный элемент и $b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_n} b_n$ ($n \geq 1$) — некоторая его приведенная запись. Тогда существуют элемент $a \in B_1 = B_{-1}$ и число m ($0 \leq m \leq \frac{n}{2}$) такие, что произведение $[t^{\varepsilon_{m+1}} b_{m+1} \dots t^{\varepsilon_{n-m}} b_{n-m}] a$ является циклически приведенной записью определяемого им элемента u и произведение

$$b_0 [t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_m} b_m] [t^{\varepsilon_{m+1}} b_{m+1} \dots t^{\varepsilon_{n-m}} b_{n-m}] a [b_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} \dots b_1^{-1} t^{-\varepsilon_1}] b_0^{-1}$$

служит приведенной записью элемента x (здесь и далее в этом предложении квадратные скобки напоминают о том, что их содержимое может быть равно 1).

Как следствие:

- 1) $x = v u v^{-1}$, где $v = b_0 [t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_m} b_m]$;
- 2) если элемент u примитивен, то $u = a$ и

$$b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_m} b_m u b_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} \dots b_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} b_0^{-1}$$

— приведенная запись элемента x ;

- 3) если элемент u непримитивен, то для любого $q > 0$

$$b_0 [t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_m} b_m] (t^{\varepsilon_{m+1}} b_{m+1} \dots t^{\varepsilon_{n-m}} b_{n-m} a)^q [b_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} \dots b_1^{-1} t^{-\varepsilon_1}] b_0^{-1}$$

— приведенная запись элемента $x^q = v u^q v^{-1}$ длины $q\ell(u) + 2\ell(v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Воспользуемся индукцией по n . Так как элемент x непримитивен и не является циклически приведенным, то n — нечетное число, не меньшее 3, и существует такое $\varepsilon = \pm 1$, что $b_1, b_n \in B_\varepsilon \setminus H_\varepsilon$. Если $b_n b_1 \notin H_\varepsilon$, то произведение $b_2 \dots b_{n-1} b'_n$ (где $b'_n = b_n b_1$) — циклически приведенная запись элемента $u = b_1^{-1} x b_1$ длины $n - 1 \geq 2$. Следовательно, можно положить $a = b_n b_1$ и $m = 1$. Те же элемент и число являются искомыми, если $n = 3$ и $b_3 b_1 \in H_\varepsilon = H_{-\varepsilon}$. В этом случае $u = b_2 (b_3 b_1) \in B_{-\varepsilon} \setminus H_{-\varepsilon}$.

Пусть $b_n b_1 \in H_\varepsilon = H_{-\varepsilon}$ и $n > 3$. Тогда произведение $b'_1 b'_2 \dots b'_{n-2}$, где $b'_i = b_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n-3$) и $b'_{n-2} = b_{n-1} b_n b_1$, служит приведенной записью элемента $x' = b_1^{-1} x b_1$ длины $n-2 \geq 3$ и по индуктивному предположению существуют элемент $a' \in B_1 \cup B_{-1}$ и число m' ($1 \leq m' \leq \frac{n-3}{2}$) такие, что

- а') элемент $u' = b'_{m'+1} \dots b'_{n-2-m'} a'$ не лежит в подгруппе $H_1 = H_{-1}$;
- б') если $\ell(u') = 1$, то $a' \in H_1 = H_{-1}$;
- в') если $\ell(u') > 1$, то $a' \notin H_1 = H_{-1}$ и произведение $b'_{m'+1} \dots b'_{n-2-m'} a'$ является циклически приведенной записью элемента u' ;
- г') произведение

$$b'_1 \dots b'_{m'} b'_{m'+1} \dots b'_{n-2-m'} d' (b'_{m'-1})^{-1} \dots (b'_1)^{-1},$$

где $d' = a' (b'_{m'})^{-1}$, служит приведенной записью элемента x' .

Положим $a = a'$ и $m = m' + 1$. Тогда указанные в пп. в', г' произведения приобретают вид

$$b_{m+1} \dots b_{n-m} a, \quad b_2 \dots b_m b_{m+1} \dots b_{n-m} d b_{m-1}^{-1} \dots b_2^{-1},$$

где $d = a b_m^{-1}$. Отсюда и из равенств $x = b_1 x' b_1^{-1}$, $\ell(x') = n-2$, $\ell(x) = n$ следует, что элемент a и число m являются искомыми.

II. Вновь воспользуемся индукцией по n . Если либо $\varepsilon_1 + \varepsilon_n \neq 0$ (это верно, в частности, при $n = 1$), либо $\varepsilon_1 + \varepsilon_n = 0$ и $b_n b_0 \notin H_{-\varepsilon_n}$, то произведение $t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_n} b_n b_0$ является циклически приведенной записью определяемого им элемента $u = b_0^{-1} x b_0$ и можно положить $a = b_0$, $m = 0$. Поэтому далее будем считать, что $n \geq 2$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_n = 0$, $b_n b_0 \in H_{-\varepsilon_n}$ и, следовательно, $t^{\varepsilon_n} b_n b_0 t^{\varepsilon_1} \in B_1 = B_{-1}$.

Если $n = 2$ и $a = t^{\varepsilon_2} b_2 b_0 t^{\varepsilon_1} b_1$, то $x = b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 a b_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} b_0^{-1}$ и, так как $\ell(x) = 2$, то $b_1 a b_1^{-1} \notin H_{-\varepsilon_1}$; значит, элемент a и число $m = 1$ оказываются искомыми. Если $n > 2$ и $b'_{n-2} = b_{n-1} t^{\varepsilon_n} b_n b_0 t^{\varepsilon_1}$, то $b'_{n-2} \in B_1 = B_{-1}$ и потому произведение

$$b'_0 t^{\varepsilon'_1} b'_1 \dots t^{\varepsilon'_{n-3}} b'_{n-3} t^{\varepsilon'_{n-2}} b'_{n-2},$$

где $b'_i = b_{i+1}$ ($0 \leq i \leq n-3$), $\varepsilon'_i = \varepsilon_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n-2$), служит приведенной записью элемента $x' = (b_0 t^{\varepsilon_1})^{-1} x (b_0 t^{\varepsilon_1})$ длины $n-2 > 0$.

По индуктивному предположению существуют элемент $a' \in B_1 = B_{-1}$ и число m' ($0 \leq m' \leq \frac{n-2}{2}$) такие, что произведение

$$[t^{\varepsilon'_{m'+1}} b'_{m'+1} \dots t^{\varepsilon'_{n-2-m'}} b'_{n-2-m'}] a'$$

является циклически приведенной записью определяемого им элемента u' и произведение

$$b'_0 [t^{\varepsilon'_1} b'_1 \dots t^{\varepsilon'_{m'}} b'_{m'}] [t^{\varepsilon'_{m'+1}} b'_{m'+1} \dots t^{\varepsilon'_{n-2-m'}} b'_{n-2-m'}] a' \times [(b'_{m'})^{-1} t^{-\varepsilon'_{m'}} \dots (b'_1)^{-1} t^{-\varepsilon'_1}] (b'_0)^{-1}$$

служит приведенной записью элемента x' . Положим $a = a'$, если $m' > 0$, $a = t^{\varepsilon_n} b_n b_0 t^{\varepsilon_1} a'$, если $m' = 0$, и $m = m' + 1$. Тогда указанные выше произведения приобретают вид

$$[t^{\varepsilon_{m+1}} b_{m+1} \dots t^{\varepsilon_{n-m}} b_{n-m}] a, \quad b_1 [t^{\varepsilon_2} b_2 \dots t^{\varepsilon_m} b_m] [t^{\varepsilon_{m+1}} b_{m+1} \dots t^{\varepsilon_{n-m}} b_{n-m}] a [b_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} \dots b_2^{-1} t^{-\varepsilon_2}] b_1^{-1}.$$

Поскольку $x = b_0 t^{\varepsilon_1} x' t^{-\varepsilon_1} b_0^{-1}$, $\ell(x') = n-2$ и $\ell(x) = n$, отсюда следует, что элемент a и число m являются искомыми.

Предложение 3. Пусть $X = P$ или $X = E$, $x, y \in X$ и $y = x^q$ для некоторого $q > 0$. Если один из элементов x, y циклически приведен и непримитивен, то другой элемент также циклически приведен и непримитивен, а числа $\ell(x)$ и $\ell(y)$ связаны соотношением $\ell(y) = q\ell(x)$.

Доказательство. Если циклически приведенным и непримитивным является элемент x , то элемент x^q тоже циклически приведен и ввиду соотношений $\ell(x^q) = q\ell(x) \geq \ell(x)$ непримитивен. Поэтому рассмотрим случай, когда указанными свойствами обладает элемент y .

Очевидно, что элемент x не может быть примитивным. Предположим, что он не является циклически приведенным. Тогда согласно предложению 2 его можно записать в виде $x = vuv^{-1}$, где u — циклически приведенный элемент. Поскольку элемент u^q снова циклически приведен и $y = vu^qv^{-1}$, из предложения 1 вытекает, что $\ell(u^q) = \ell(y)$ и, в частности, элемент u не является примитивным.

Если $X = P$, то элементы u и $y = x^q$ имеют четную длину. Но в силу утверждения I.3 предложения 2 длина элемента x^q нечетна, и мы получаем противоречие.

Если $X = E$, то ввиду того же предложения $\ell(y) = q\ell(u) + 2\ell(v) = \ell(u^q) + 2\ell(v)$. С учетом установленного ранее равенства $\ell(u^q) = \ell(y)$ отсюда следует, что $\ell(v) = 0$. Пусть t^ε — первый символ циклически приведенной записи элемента y и $t^{\delta_1}u_1 \dots t^{\delta_n}u_n$ — циклически приведенная запись элемента u . Тогда $x^q = v(t^{\delta_1}u_1 \dots t^{\delta_n}u_n)^qv^{-1}$ и из равенства $y^{-1}x^q = 1$ вытекает, что $\varepsilon = \delta_1$ и $v \in H_{\delta_1}$. Следовательно, $t^{-\delta_1}vt^{\delta_1} \in H_{-\delta_1}$ и $x = t^{\delta_1}u_1't^{\delta_2}u_2 \dots t^{\delta_n}u_nv^{-1}$, где $u_1' = t^{-\delta_1}vt^{\delta_1}u_1 \in B_1 = B_{-1}$. Ввиду сделанного предположения указанная запись элемента x не является циклически приведенной и потому данный элемент (а вместе с ним и элемент u) оказывается сопряжен с некоторым элементом x' длины, меньшей $n = \ell(u)$. Согласно предложению 2 x' , в свою очередь, сопряжен с циклически приведенным элементом длины, не большей $\ell(x')$, что невозможно в силу уже упоминавшегося предложения 1.

Таким образом, элемент x циклически приведен и $\ell(y) = q\ell(x)$.

Предложение 4 [4, § 2, теорема 2, следствие 2]. Пусть $X = P$ или $X = E$. Если A — абелева подгруппа группы X , то выполняется хотя бы одно из следующих утверждений.

1. Подгруппа A сопряжена с подгруппой группы B_ε для некоторого $\varepsilon = \pm 1$.
2. Подгруппа A сопряжена с подгруппой вида $\langle x \rangle \times C$, где x — элемент бесконечного порядка, $C \leq H_1$ или $C \leq H_{-1}$.
3. Подгруппа A является объединением возрастающей цепочки подгрупп, каждая из которых сопряжена с подгруппой из H_1 или H_{-1} .

Предложение 5. Пусть $X = P$ или $X = E$. Если A — конечно порожденная абелева подгруппа группы X , то она сопряжена либо с подгруппой группы B_ε для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, либо с подгруппой вида $\langle x \rangle \times C$, где x — непримитивный циклически приведенный элемент, $C \leq H_1$ или $C \leq H_{-1}$.

Доказательство. Так как подгруппа A конечно порождена, в силу предложения 4 она сопряжена с подгруппой группы B_ε для некоторого $\varepsilon = \pm 1$ или с подгруппой вида $\langle x \rangle \times C$, где $x \in X, C \leq H_1$ или $C \leq H_{-1}$. Пусть реализуется вторая возможность. Если элемент x примитивен, то $\langle x \rangle \times C \leq B_1$ или $\langle x \rangle \times C \leq B_{-1}$. Если x — непримитивный циклически приведенный элемент, то доказывать нечего. Поэтому далее будем считать, что элемент x не является ни примитивным, ни циклически приведенным.

Согласно предложению 2 $x = vuv^{-1}$, где u — циклически приведенный элемент и $v \neq 1$. Поскольку подгруппа A абелева, для любого элемента $c \in C$ справедливо равенство $c = x^{-1}cx$, означающее, что $x^{-1}cx$ — примитивный элемент. Понятно, что если элемент x задан приведенной записью из предложения 2, началом которой служит приведенная запись элемента v , то сокращения в произведении $x^{-1}cx = vu^{-1}v^{-1}cvuv^{-1}$ могут происходить только при сопряжении элемента c и элементов, последовательно получающихся в результате таких сопряжений. Отсюда, в частности, следует, что $v^{-1}cv \in B_1 \cup B_{-1}$ для любого $c \in C$. Далее рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1. $X = P$.

Пусть $u_1u_2 \dots u_n$ — циклически приведенная запись элемента u из предложения 2. Согласно утверждению I.a указанного предложения $u \notin H_1 = H_{-1}$ даже если $n = 1$. Поэтому $u_1 \in B_\delta \setminus H_\delta$ для некоторого $\delta = \pm 1$ и из установленного выше включения $v^{-1}Cv \subseteq B_1 \cup B_{-1}$ вытекает, что $v^{-1}Cv \leq B_\delta$ и $u_1^{-1}v^{-1}Cvu_1 \leq B_\delta$.

Если $n = 1$, то $u = u_1 \in B_\delta \setminus H_\delta$ и

$$A \sim_X u^{-1}v^{-1}(\langle x \rangle \times C)vu = \langle u \rangle \times (u^{-1}v^{-1}Cvu) \leq B_\delta.$$

Если $n > 1$, то $u_2 \in B_{-\delta} \setminus H_{-\delta}$ и потому $u_1^{-1}v^{-1}Cvu_1 \leq H_\delta$. Поскольку элемент $u_1^{-1}uu_1 = u_2 \dots u_n u_1$ циклически приведен и непримитивен, отсюда следует, что подгруппа A сопряжена с подгруппой

$$u_1^{-1}v^{-1}(\langle x \rangle \times C)vu_1 = \langle u_1^{-1}uu_1 \rangle \times (u_1^{-1}v^{-1}Cvu_1),$$

имеющей требуемый вид.

СЛУЧАЙ 2. $X = E$.

Если $\ell(u) = 0$, то из установленного выше включения $v^{-1}Cv \leq B_1 = B_{-1}$ следует, что

$$A \sim_X v^{-1}(\langle x \rangle \times C)v = \langle u \rangle \times v^{-1}Cv \leq B_1 = B_{-1}.$$

Если же $\ell(u) > 0$ и t^δ — первый символ циклически приведенной записи элемента u , то $v^{-1}Cv \leq H_\delta$ и подгруппа $v^{-1}(\langle x \rangle \times C)v = \langle u \rangle \times (v^{-1}Cv)$ вновь имеет требуемый вид.

Если \mathfrak{P} — произвольное множество простых чисел, X — некоторая группа и Y — подгруппа группы X , то через $\mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{At}(X, Y)$ будем обозначать множество элементов группы X , определенное следующим образом: $x \in \mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{At}(X, Y)$ тогда и только тогда, когда $x^q \in Y$ для некоторого целого числа q , все простые делители которого принадлежат множеству \mathfrak{P} .

Предложение 6. Пусть $X = P$ или $X = E$, $\delta \in \{1, -1\}$ и A — абелева подгруппа группы B_δ . Если \mathfrak{P} — некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{At}(B_\varepsilon, H_\varepsilon) = H_\varepsilon$ для каждого $\varepsilon = \pm 1$, то $\mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{At}(X, A) \leq B_\delta$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{At}(X, A)$ — произвольный элемент. Тогда $x^q \in A$ для некоторого целого положительного числа q , все простые делители которого принадлежат множеству \mathfrak{P} . Если x — непримитивный циклически приведенный элемент, то согласно предложению 3 элемент x^q также непримитивен, что невозможно ввиду включения $A \leq B_\delta$. Предположим, что элемент x примитивен и не является циклически приведенным. Тогда в силу предложения 2 $x = vuv^{-1}$, где u — циклически приведенный элемент, и выполняются следующие утверждения:

- 1) если элемент u непримитивен, то элемент x^q также непримитивен;
 2) если элемент u примитивен, $X = P$ ($X = E$) и

$$b_1 \dots b_m \quad (b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_m} b_m)$$

— приведенная запись элемента v , то

$$b_1 \dots b_m u b_m^{-1} \dots b_1^{-1} \quad (b_0 t^{\varepsilon_1} b_1 \dots t^{\varepsilon_m} b_m u b_m^{-1} t^{-\varepsilon_m} \dots b_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} b_0^{-1})$$

— приведенная запись элемента x .

Так как элемент x^q примитивен, а элемент x — нет, то согласно утверждению 1 элемент u примитивен и из утверждения 2 вытекают соотношения:

р) $u \in B_\gamma \setminus H_\gamma$, $b_m \in B_{-\gamma} \setminus H_{-\gamma}$ и $u^q \in H_\gamma$ для некоторого $\gamma = \pm 1$, если $X = P$;

е) $b_m u b_m^{-1} \notin H_{-\varepsilon_m}$ и $(b_m u b_m^{-1})^q \in H_{-\varepsilon_m}$, если $X = E$.

Но по условию $\mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{Rt}(B_\varepsilon, H_\varepsilon) = H_\varepsilon$ для каждого $\varepsilon = \pm 1$. Следовательно, $u \in H_\gamma$, если $X = P$, и $b_m u b_m^{-1} \in H_{-\varepsilon_m}$, если $X = E$. Полученное противоречие доказывает, что элемент x примитивен. Остается заметить, что если $X = P$ и $x \in B_{-\delta}$, то $x^q \in B_\delta \cap B_{-\delta} = H_{-\delta}$ и ввиду равенства $\mathfrak{P}\text{-}\mathfrak{Rt}(B_{-\delta}, H_{-\delta}) = H_{-\delta}$ справедливы соотношения $x \in H_{-\delta} = H_\delta \leq B_\delta$.

§ 3. Доказательство теоремы

Если Δ — непустой связный подграф графа Γ , то через $\mathcal{G}(\Delta)$ будем обозначать граф групп, вершинам и ребрам которого сопоставлены те же группы, направления и гомоморфизмы, что и в графе $\mathcal{G}(\Gamma)$. Указанный подграф Δ назовем *допустимым*, если граф $\Delta \cap \mathcal{T}$ служит максимальным поддеревом в графе Δ . Всюду далее, говоря о допустимом подграфе Δ , будем предполагать, что представление группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Delta))$ соответствует дереву $\Delta \cap \mathcal{T}$.

Предложение 7 [7, предложение 1]. *Если Δ — допустимый подграф графа Γ , то тождественное отображение образующих группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Delta))$ в группу \mathfrak{G} определяет инъективный гомоморфизм и потому группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Delta))$ можно считать подгруппой группы \mathfrak{G} .*

Предложение 8. *Для любых конечных подмножеств $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, $S \subseteq \mathfrak{G}$ существует допустимый конечный подграф Δ графа Γ , удовлетворяющий условию $S \subseteq \pi_1(\mathcal{G}(\Delta))$ и содержащий все вершины из \mathcal{V}' и все ребра из \mathcal{E}' .*

Доказательство. Пусть ω — множество всех образующих группы \mathfrak{G} , входящих в некоторые фиксированные слова, задающие элементы из S . Определим подмножества $\mathcal{V}_\omega \subseteq \mathcal{V}$ и $\mathcal{E}_\omega \subseteq \mathcal{E}$ следующим образом: $v \in \mathcal{V}_\omega$ тогда и только тогда, когда множество ω содержит некоторый образующий группы G_v ; $e \in \mathcal{E}_\omega$ тогда и только тогда, когда в множество ω входит символ t_e . Пусть \mathcal{Q} — конечное поддерево дерева \mathcal{T} , содержащее все вершины множества

$$\mathcal{V}_\omega \cup \mathcal{V}' \cup \{e(\varepsilon) \mid e \in \mathcal{E}_\omega \cup \mathcal{E}', \varepsilon = \pm 1\}.$$

Тогда искомым является подграф Δ графа Γ , получающийся в результате добавления к дереву \mathcal{Q} всех еще не содержащихся в нем ребер из множества $\mathcal{E}_\omega \cup \mathcal{E}'$.

Предложение 9. *Пусть Δ — допустимый конечный подграф графа Γ , \mathcal{V}_Δ — множество его вершин, $\mathfrak{H} = \pi_1(\mathcal{G}(\Delta))$ и $x \in \mathfrak{H}$ — произвольный элемент. Если $h^{-1}xh \notin G_u$ для всех $h \in \mathfrak{H}$, $u \in \mathcal{V}_\Delta$, то $g^{-1}xg \notin G_v$ для всех $g \in \mathfrak{G}$, $v \in \mathcal{V}$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим два частных случая.

СЛУЧАЙ 1. Граф Γ получается из Δ добавлением вершины w и ребра f , соединяющего ее с некоторой вершиной графа Δ .

Пусть для определенности $w = f(-1)$. Тогда группа \mathfrak{G} представляет собой обобщенное свободное произведение групп \mathfrak{H} и G_w с объединенными подгруппами H_{+f} и H_{-f} . Пусть $g \in \mathfrak{G}$ — произвольный элемент и $g_1 \dots g_n$ — его приведенная запись в указанном обобщенном свободном произведении. Так как $h^{-1}xh \in \mathfrak{H}$ и $h^{-1}xh \notin G_{f(1)} \geq H_{+f}$ для любого $h \in \mathfrak{H}$, то $x \in \mathfrak{H} \setminus H_{+f}$, $\ell(g^{-1}xg) = 2n + 1$, если $g_1 \in G_w \setminus H_{-f}$, и $\ell(g^{-1}xg) = 2n - 1$, если $g_1 \in \mathfrak{H}$. Стало быть, если $g_1 \in G_w \setminus H_{-f}$ или $n > 1$, то $g^{-1}xg \notin \mathfrak{H} \cup G_w \supseteq \bigcup_{v \in \mathcal{V}} G_v$. Если же $g = g_1 \in \mathfrak{H}$, то по условию предложения $g^{-1}xg \notin \bigcup_{v \in \mathcal{V}_\Delta} G_v$, откуда $g^{-1}xg \in \mathfrak{H} \setminus H_{+f}$ и $g^{-1}xg \notin G_w$ ввиду равенства $G_w \cap \mathfrak{H} = H_{+f}$.

СЛУЧАЙ 2. Граф Γ получается из Δ добавлением ребра f , оба конца которого принадлежат графу Δ .

В этом случае группа \mathfrak{G} является HNN-расширением группы \mathfrak{H} с проходной буквой t_f и связанными подгруппами H_{+f} и H_{-f} . Пусть $g \in \mathfrak{G}$ — произвольный элемент и $g_0 t_f^{\varepsilon_1} g_1 \dots t_f^{\varepsilon_n} g_n$ — его приведенная запись в рассматриваемом HNN-расширении. Согласно условию предложения $g_0^{-1}xg_0 \notin G_v$ для всех $v \in \mathcal{V}$, поэтому $g_0^{-1}xg_0 \notin H_{+f} \cup H_{-f}$ и n далее можно считать большим 0. Отсюда следует, что $\ell(g^{-1}xg) = 2n > 0$ и $g^{-1}xg \notin \mathfrak{H} \supseteq \bigcup_{v \in \mathcal{V}} G_v$.

Рассмотрим теперь случай произвольного графа Γ и предположим, что $g^{-1}xg \in G_v$ для некоторых $g \in \mathfrak{G}$, $v \in \mathcal{V}$. Согласно предложению 8 существует допустимый конечный подграф $\overline{\Delta}$ графа Γ , содержащий граф $\Delta \cup \{v\}$ и удовлетворяющий условию $g \in \pi_1(\mathcal{G}(\overline{\Delta}))$. Легко видеть, что граф $\overline{\Delta}$ можно получить из Δ , применяя операции, описанные в случаях 1, 2, и притом так, что в возникающей последовательности графов каждый элемент служит допустимым подграфом графа Γ . Ввиду доказанного выше отсюда следует, что вопреки предположению в группе $\pi_1(\mathcal{G}(\overline{\Delta}))$ не должно выполняться включение $g^{-1}xg \in G_v$.

Предложение 10. Пусть Γ — конечный граф и A — конечно порожденная абелева подгруппа группы \mathfrak{G} . Тогда подгруппа A сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_3(\mathfrak{G})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что Γ является деревом, и воспользуемся индукцией по числу вершин в нем. Если Γ содержит только одну вершину v , то $\mathfrak{G} = G_v$ и доказываемое утверждение тривиально. Поэтому будем считать, что в дереве Γ имеется по крайней мере две вершины и, следовательно, $\mathcal{E} \neq \emptyset$.

Зафиксируем некоторое ребро $f \in \mathcal{E}$. При его удалении граф Γ распадается на две компоненты связности. Обозначим через Δ_ε ($\varepsilon = \pm 1$) ту из них, которая содержит вершину $f(\varepsilon)$, и положим $\mathfrak{B}_\varepsilon = \pi_1(\mathcal{G}(\Delta_\varepsilon))$. Тогда группа \mathfrak{G} представляет собой свободное произведение групп \mathfrak{B}_1 и \mathfrak{B}_{-1} с объединенной подгруппой $H_{+f} = H_{-f}$ и в силу предложения 5, заменяя при необходимости подгруппу A на сопряженную, достаточно рассмотреть следующие два случая.

СЛУЧАЙ 1. $A \leq \mathfrak{B}_\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$.

Обозначим через \mathcal{V}_ε и \mathcal{E}_ε множества вершин и ребер графа Δ_ε . Применяя индуктивное предположение к группе \mathfrak{B}_ε и заменяя, если нужно, подгруппу A сопряженной, можно считать, что либо $A \leq G_v$ для некоторой вершины $v \in \mathcal{V}_\varepsilon$, либо $A = XY$, где $X \leq H_{\delta e}$ для некоторых $e \in \mathcal{E}_\varepsilon$, $\delta = \pm 1$, Y — бесконечная циклическая подгруппа группы \mathfrak{B}_ε и $b^{-1}xyb \notin G_u$ для всех $b \in \mathfrak{B}_\varepsilon$, $x \in X$, $y \in$

$Y \setminus \{1\}$, $u \in \mathcal{V}_\varepsilon$. Остается заметить, что Δ_ε является допустимым конечным подграфом графа Γ и потому, если реализуется вторая возможность, то ввиду предложения 9 соотношение $g^{-1}xyg \notin G_v$ имеет место для всех $g \in \mathfrak{G}$, $x \in X$, $y \in Y \setminus \{1\}$, $v \in \mathcal{V}$.

СЛУЧАЙ 2. $A = X \times \langle y \rangle$, где y — непримитивный циклически приведенный элемент, $X \leq H_{+f} = H_{-f}$.

Пусть $x \in X$, $q > 0$. Так как $x \in H_{+f} = H_{-f}$, то по предложению 3 xy^q — непримитивный циклически приведенный элемент и в силу предложения 1 $g^{-1}xy^qg \notin \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_{-1}$ для любого $g \in \mathfrak{G}$. Отсюда легко следует, что $g^{-1}xy^r g \notin \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_{-1} \supseteq \bigcup_{v \in \mathcal{V}} G_v$ для всех $g \in \mathfrak{G}$, $r \neq 0$, как и требуется.

Теперь обратимся к общей ситуации и воспользуемся индукцией по числу ребер, не входящих в максимальное дерево графа Γ . База индукции доказана выше, поэтому будем предполагать, что имеется по крайней мере одно такое ребро f и граф Δ получается из Γ путем его удаления. Тогда группа \mathfrak{G} представляет собой HNN-расширение группы $\mathfrak{B} = \pi_1(\mathcal{G}(\Delta))$ с проходной буквой t_f и связанными подгруппами H_{+f} , H_{-f} , и ввиду предложения 5 вновь можно считать, что либо $A \leq \mathfrak{B}$, либо $A = X \times \langle y \rangle$, где y — непримитивный циклически приведенный элемент, $X \leq H_{+f}$ или $X \leq H_{-f}$. Если $A \leq \mathfrak{B}$, то достаточно обозначить группу \mathfrak{B} и граф Δ через \mathfrak{B}_ε и Δ_ε соответственно, а затем слово в слово повторить рассуждения, использованные выше при рассмотрении случая 1. Поэтому будем предполагать, что реализуется вторая возможность.

Пусть $t_f^{\varepsilon_1} y_1 \dots t_f^{\varepsilon_n} y_n$ ($n > 0$) — циклически приведенная запись элемента y в рассматриваемом HNN-расширении и $x \in X$ — произвольный элемент. Тогда, если $\varepsilon_1 + \varepsilon_n = 0$, то $y_n \notin H_{-\varepsilon_n f}$. Так как $[x, y] = 1$, то $xyx^{-1} = x \in \mathfrak{B}$ и потому произведение

$$t_f^{\varepsilon_1} y_1 \dots t_f^{\varepsilon_n} y_n x y_n^{-1} t_f^{-\varepsilon_n} \dots y_1^{-1} t_f^{-\varepsilon_1}$$

не может быть приведено. Значит, $y_n x y_n^{-1} \in H_{-\varepsilon_n f}$ и, если $\varepsilon_1 + \varepsilon_n = 0$, то $y_n x \notin H_{-\varepsilon_n f}$. Отсюда легко следует, что для любого $q > 0$ $y^q x$ — непримитивный циклически приведенный элемент и в силу предложения 1 $g^{-1}y^q x g \notin \mathfrak{B}$ для каждого $g \in \mathfrak{G}$. Как и выше, последнее означает, что $g^{-1}xy^r g \notin \mathfrak{B} \supseteq \bigcup_{v \in \mathcal{V}} G_v$ для всех $g \in \mathfrak{G}$, $r \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Импликации $3 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 1$ и $1 \Rightarrow 4$ очевидны. Покажем, что имеет место импликация $4 \Rightarrow 3$.

Так как подгруппа A конечно порождена, то согласно предложению 8 существует допустимый конечный подграф Δ графа Γ , удовлетворяющий условию $A \leq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = \pi_1(\mathcal{G}(\Delta))$. Применяя к нему предложение 10, получаем, что подгруппа A сопряжена (в \mathfrak{H}) с некоторой подгруппой вида XY , где $(X, Y) \in \mathfrak{D}_3(\mathfrak{H})$. Если $Y = 1$, то $(X, Y) \in \mathfrak{D}_3(\mathfrak{G})$. Если $Y \neq 1$ и $h^{-1}xyh \notin G_u$ для всех $h \in \mathfrak{H}$, $x \in X$, $y \in Y \setminus \{1\}$, $u \in \mathcal{V}_\Delta$ (где \mathcal{V}_Δ — множество вершин графа Δ), то ввиду предложения 9 $g^{-1}xyg \notin G_v$ для всех $g \in \mathfrak{G}$, $x \in X$, $y \in Y \setminus \{1\}$, $v \in \mathcal{V}$ и потому снова $(X, Y) \in \mathfrak{D}_3(\mathfrak{G})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kurosch A. Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen // Math. Ann. 1934. V. 109, N 1. P. 647–660.
2. Karrass A., Solitar D. The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 150, N 1. P. 227–255.
3. Karrass A., Solitar D. Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Canad. J. Math. 1971. V. 23, N 4. P. 627–643.

4. Молдаванский Д. И. О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 6. С. 1370–1384.
5. Serre J.-P. Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1980.
6. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
7. Соколов Е. В. Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.

Поступила в редакцию 20 марта 2023 г.

После доработки 20 марта 2023 г.

Принята к публикации 2 августа 2023 г.

Соколов Евгений Викторович (ORCID 0000-0002-8256-8016)
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
ev-sokolov@yandex.ru