Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 512.543

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП ГРАФОВ ГРУПП. II

Е. В. Соколов

Аннотация. Пусть $\mathfrak{G}$ — фундаментальная группа произвольного графа групп и $\mathscr{C}$ — корневой класс групп (т. е. класс, содержащий неединичные группы и замкнутый относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathscr{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$). Доказан критерий отделимости классом $\mathscr{C}$ конечно порожденной абелевой подгруппы группы $\mathfrak{G}$, имеющий место в случае, когда указанная группа удовлетворяет аналогу фильтрационного условия Баумслага. С помощью этого результата для фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами получено описание $\mathscr{C}$-отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.116

Ключевые слова: отделимость абелевых подгрупп, отделимость циклических подгрупп, аппроксимируемость корневыми классами, фундаментальная группа графа групп, древесное произведение

§ 1. Введение

Настоящая статья служит второй частью работы, посвященной изучению отделимости корневыми классами групп конечно порожденных абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. В первой части [1] были доказаны теорема о структуре указанных подгрупп и ряд вспомогательных утверждений. Здесь с их помощью будут получены два достаточно общих критерия отделимости подгрупп рассматриваемого типа.

Понятие отделимой подалгебры и, в частности, подгруппы было введено А. И. Мальцевым [2]. Согласно данному им определению подгруппа Y группы X называется *отделимой* в этой группе *классом групп* $\mathscr{C}$ (или, короче, $\mathscr{C}$*-отделимой* в X), если для любого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathscr{C}$, удовлетворяющий условию $x\sigma \notin Y\sigma$. Отметим, что понятие *аппроксимируемости* является частным случаем отделимости, поскольку аппроксимируемость группы X классом $\mathscr{C}$ равносильна $\mathscr{C}$-отделимости ее единичной подгруппы. Напомним также, что отделимость классом всех конечных групп называется, как и аппроксимируемость, *финитной*.

Хорошо известно, что в конечной определенной группе финитная отделимость подгруппы означает разрешимость алгоритмической проблемы вхождения элемента в данную подгруппу. Помимо этого отделимость тех или иных

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00166, https://rscf.ru/project/22-21-00166/.

подгрупп нередко оказывается одним из необходимых и (или) достаточных условий аппроксимируемости. Особенно часто такая взаимосвязь обнаруживается при изучении аппроксимируемости различных теоретико-групповых конструкций (см., например, [3–12]).

Корневые классы групп были введены в рассмотрение Грюнбергом [13], и использование этого понятия оказалось весьма продуктивным при исследовании аппроксимируемости свободных конструкций групп (см. [6, 8, 11, 12, 14–17]). Поэтому изучение отделимости подгрупп таких конструкций корневыми классами представляется вполне оправданным, особенно ввиду отмеченной выше взаимосвязи с условиями аппроксимируемости.

Напомним, что согласно одному из равносильных определений содержащий неединичные группы класс групп $\mathcal{C}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathcal{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$ [18]. Примерами корневых классов могут служить классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), периодических $\mathfrak{P}$-групп конечного периода (где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп и всех групп без кручения. Нетрудно показать также, что если пересечение семейства корневых классов групп содержит неединичную группу, то оно снова является корневым классом.

Всюду далее, если $\mathfrak{P}$ — некоторое множество простых чисел, то через $\mathfrak{P}'$ будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих $\mathfrak{P}$. Целое число будем называть $\mathfrak{P}$-*числом*, если все его простые делители содержатся в $\mathfrak{P}$. Напомним, что подгруппа Y группы X называется $\mathfrak{P}'$-*изолированной* в этой группе, если для каждого элемента $x \in X$ и для каждого числа $q \in \mathfrak{P}'$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Если $\mathfrak{P}'$-изолированной является единичная подгруппа группы X, то говорят, что указанная группа *не имеет* $\mathfrak{P}'$-*кручения*. Отметим также, что если $\mathfrak{P}$ совпадает с множеством всех простых чисел, то любая подгруппа оказывается $\mathfrak{P}'$-изолированной.

Если класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп, то через $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{C}$. Для упрощения формулировок утверждений будем считать, что если класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ — это множество всех простых чисел. Известно (см. предложение 4.1 ниже), что, каким бы ни был класс групп $\mathcal{C}$, из отделимости подгруппы этим классом следует ее $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированность. Поэтому свойство $\mathcal{C}$-отделимости имеет смысл изучать лишь в отношении $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированных подгрупп и обобщением утверждения о финитной отделимости всех подгрупп некоторого типа T (например, циклических) оказывается утверждение о $\mathcal{C}$-отделимости всех $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированных подгрупп типа T.

Основным методом исследования аппроксимируемости корневыми классами свободных конструкций групп служит так называемый «фильтрационный подход» Баумслага, первоначально предложенный в [19] для изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений двух групп и затем распространенный на другие конструкции и аппроксимирующие классы. Ким показал, как аналогичные рассуждения могут быть применены для доказательства финитной отделимости всех циклических подгрупп обобщенного свободного произведения двух групп [20] и HNN-расширения с одной проходной буквой [21]. В [22–24] эти идеи были адаптированы для изучения отделимости классом конечных p-групп, где p — некоторое простое число, и распространены на случай, когда не обязательно все подгруппы свободных множителей или базовой группы являются отделимыми. Сравнительно недавно Чжоу и Ким [25, 26] показали, как применить фильтрационный подход для доказательства финитной отделимости всех конечно порожденных абелевых подгрупп двух указанных выше конструкций. Наконец, в [17] метод изучения аппроксимируемости Баумслага был распространен на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп и фундаментальной группы произвольного графа групп. В настоящей работе все перечисленные идеи объединяются для получения описания конечно порожденных абелевых подгрупп фундаментальной группы графа групп, отделимых наперед заданным корневым классом групп.

Когда речь идет о некоторой теоретико-групповой конструкции, наиболее естественным оказывается вопрос о том, при каких условиях данная конструкция наследует то или иное свойство от групп, из которых она составлена. Задача, решаемая в настоящей работе, выглядит следующим образом: требуется получить критерий отделимости корневым классом групп $\mathcal{C}$ $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированной конечно порожденной абелевой подгруппы фундаментальной группы графа групп при условии, что аналогичные критерии известны для всех вершинных групп данного графа. Полученные в этом направлении результаты сформулированы в § 2, 3, а их доказательства приводятся в § 4–8.

§ 2. Основные результаты

Будем использовать те же обозначения, что и в [1]. А именно, до конца статьи будем считать, что

а) Γ — непустой неориентированный связный граф с множеством вершин $\mathcal{V}$ и множеством ребер $\mathcal{E}$ (допустимы петли и кратные ребра);

б) $\mathcal{T}$ — некоторое фиксированное максимальное дерево в графе Γ с множеством ребер $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$;

в) $\mathcal{G}(\Gamma)$ — ориентированный граф групп над Γ, в котором каждой вершине $v \in \mathcal{V}$ сопоставлена некоторая группа G_v, а каждому ребру $e \in \mathcal{E}$ — направление, группа H_e и инъективные гомоморфизмы

$$\varphi_{+e}\colon H_e \to G_{e(1)}, \quad \varphi_{-e}\colon H_e \to G_{e(-1)},$$

где $e(1)$ и $e(-1)$ — вершины графа $\mathcal{G}(\Gamma)$, являющиеся концами ребра e;

г) $\mathfrak{G}$ — фундаментальная группа графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ с соответствующим дереву $\mathcal{T}$ представлением

$$\left\langle \begin{array}{l} G_v \ (v \in \mathcal{V}), \\ t_e \ (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}}) \end{array} \middle| \begin{array}{c} h_e\varphi_{+e} = h_e\varphi_{-e} \ (e \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}},\ h_e \in H_e), \\ t_e^{-1}h_e\varphi_{+e}t_e = h_e\varphi_{-e} \ (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\mathcal{T}},\ h_e \in H_e) \end{array} \right\rangle.$$

Группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ будем называть *вершинными*, подгруппы $H_{+e} = H_e\varphi_{+e}$ и $H_{-e} = H_e\varphi_{-e}$ — *реберными*. Если $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп и X — некоторая группа, то через $\mathcal{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$.

Первым из результатов настоящей статьи является

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп и существует гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на группу из данного класса, действующий инъективно на всех вершинных группах. Тогда каждая $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая некоторому нетривиальному тождеству, $\mathcal{C}$-отделима и, в частности, группа $\mathfrak{G}$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Отметим, что достаточные условия существования гомоморфизма из формулировки теоремы 2.1 найдены в [6, 8, 11, 12, 16, 27]. В [28, 29] обсуждается вопрос о равносильности наличия такого гомоморфизма и $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$. Прежде, чем перейти к описанию результатов об отделимости подгрупп группы $\mathfrak{G}$, полученных в случае, когда указанного гомоморфизма не существует, приведем одно утверждение, вытекающее из теорем 1, 3 и предложения 2 статьи [17].

Теорема 2.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп.*

I. *Группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, если выполняются следующие условия:*

(i^1) $\forall v \in \mathscr{V}\ \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})}(N \cap G_v) = 1$;

(ii^1) $\forall e \in \mathscr{E},\ \varepsilon = \pm 1\ \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) = H_{\varepsilon e}$.

II. *Пусть справедливо утверждение* ($*$): *для любых $v \in \mathscr{V}$, $M \in \mathscr{C}^*(G_v)$ существует подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ такая, что $N \cap G_v \leq M$. Тогда группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, если выполняются следующие условия:*

(i^2) *все группы G_v ($v \in \mathscr{V}$) $\mathscr{C}$-аппроксимируемы;*

(ii^2) *для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathscr{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Отметим, что условия (i^1) и (ii^1) являются слабейшими из тех, при которых упоминавшийся выше фильтрационный метод Баумслага может быть применен, и потому имеют место всякий раз, когда аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ доказывается с помощью данного метода. Однако они зависят не только от свойств вершинных групп и содержащихся в них реберных подгрупп, но и от того, как устроена группа $\mathfrak{G}$ в целом. Если выполняется утверждение ($*$), то указанные условия превращаются в более понятные и не связанные с группой $\mathfrak{G}$ требования (i^2) и (ii^2). При этом ввиду приводимого ниже предложения 6.1 утверждению ($*$) можно дать и другую, более простую с точки зрения его доказательства формулировку. Вместе с тем указанное утверждение, по-видимому, не следует из ограничений (i^1), (ii^1) и потому полностью отказаться от использования последних, вообще говоря, нельзя. Более подробное обсуждение условий теоремы 2.2 приводится в [17].

Пусть $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп и (X, Y) — пара подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Рассмотрим следующий набор условий:

($\lambda^0_{\mathscr{C}}$) X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы G_v ($v \in \mathscr{V}$), $Y = 1$;

($\mu^0_{\mathscr{C}}$) X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$), Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap G_{e(\varepsilon)} = 1$ и $[X, Y] = 1$;

($\lambda^1_{\mathscr{C}}$) справедливо условие ($\lambda^0_{\mathscr{C}}$), подгруппа X $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе G_v, но $\bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} X(N \cap G_v) \neq X$;

($\mu^1_{\mathscr{C}}$) справедливо условие ($\mu^0_{\mathscr{C}}$), подгруппа X $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$, но $\bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} X(N \cap G_{e(\varepsilon)}) \neq X$;

($\lambda^2_{\mathscr{C}}$) справедливо условие ($\lambda^0_{\mathscr{C}}$), подгруппа X $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе G_v, но не является $\mathscr{C}$-отделимой в этой группе;

($\mu^2_{\mathscr{C}}$) справедливо условие ($\mu^0_{\mathscr{C}}$), подгруппа X $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$, но не является $\mathscr{C}$-отделимой в этой группе.

Обозначим через $\mathfrak{D}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ ($0 \leq k \leq 2$) семейство всех пар подгрупп группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию ($\lambda^k_{\mathscr{C}}$) или ($\mu^k_{\mathscr{C}}$), и положим

$$\mathfrak{A}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G}) = \big\{ XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G}) \big\}.$$

Согласно [1] подгруппа A группы G конечно порожденная абелева тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^0_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$. Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2.3. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп.*

I. *Если выполняются условия* (i^1), (ii^1) *из формулировки теоремы* 2.2, *то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.*

II. *Пусть справедливо утверждение* $(*)$ *и выполняются условия* (i^2), (ii^2) *из формулировки теоремы* 2.2. *Тогда $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$. В частности, если каждая вершинная группа обладает свойством $\mathscr{C}$-отделимости всех своих $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированных конечно порожденных абелевых подгрупп, то данное свойство имеет место и для группы $\mathfrak{G}$.*

Приведенная теорема утверждает, что если аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ корневым классом $\mathscr{C}$ установлена путем проверки условий теоремы 2.2 (а в очень многих случаях именно так и происходит), то «бесплатным» дополнением к ней оказывается то или иное описание $\mathscr{C}$-отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп данной группы. В некоторых случаях условия (i^1), (ii^1) или (i^2), (ii^2) равносильны $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ (см., например, [17, 28, 30]), и тогда критерий $\mathscr{C}$-отделимости конечно порожденной абелевой подгруппы этой группы вытекает из ее $\mathscr{C}$-аппроксимируемости вне зависимости от того, каким способом последняя была доказана.

Отметим, что семейство $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$, как и условия (i^1), (ii^1), зависит от устройства группы $\mathfrak{G}$ в целом. Что же касается семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$, для его описания требуется знать лишь критерии $\mathscr{C}$-отделимости $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированных конечно порожденных абелевых подгрупп в вершинных группах. Таким образом, утверждение II теоремы 2.3 дает частичное решение задачи, поставленной в конце предыдущего параграфа.

Понятно, что теорема 2.3 предоставляет и описание $\mathscr{C}$-отделимых циклических подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Сформулируем его явным образом.

Пусть $\mathfrak{B}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ и $\mathfrak{B}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ — семейства циклических подгрупп, определенные следующим образом:

1) $Z \in \mathfrak{B}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ тогда и только тогда, когда Z — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа некоторой группы G_v $(v \in \mathscr{V})$ такая, что $\bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} Z(N \cap G_v) \neq Z$;

2) $Z \in \mathfrak{B}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ тогда и только тогда, когда Z — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа некоторой группы G_v $(v \in \mathscr{V})$, не являющаяся $\mathscr{C}$-отделимой в этой группе.

Следствие 2.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп.*

I. *Если выполняются условия* (i^1), (ii^1) *из формулировки теоремы* 2.2, *то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная циклическая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{B}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.*

II. *Пусть справедливо утверждение* $(*)$ *и выполняются условия* (i^2), (ii^2) *из формулировки теоремы* 2.2. *Тогда $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная циклическая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{B}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$. В частности, если каждая вершинная группа обладает свойством $\mathscr{C}$-отделимости всех своих*

$\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированных циклических подгрупп, то данное свойство имеет место и для группы $\mathfrak{G}$.

Отметим, что утверждение II теоремы 2.3 обобщает теорему 2.10 из [25] и теорему 3.6 из [26], а следствие 2.4 — теорему 2.2 из [21], теорему 1.1 из [20], теоремы 1, 2 из [24] и теоремы 2.2.2, 2.3.2 из [23]. Из перечисленных обобщаемых утверждений в первых шести речь идет о финитной отделимости, в последних двух — об отделимости классом конечных $\mathfrak{P}$-групп, где $\mathfrak{P}$ — произвольное множество простых чисел.

§ 3. Некоторые приложения

Приведем несколько примеров применения теоремы 2.3 к фундаментальным группам графов групп с центральными реберными подгруппами. Имеет место

Теорема 3.1. *Пусть для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ лежит в центре группы $G_{e(\varepsilon)}$ и $G_{e(\varepsilon)} \neq H_{\varepsilon e}$. Если группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируется корневым классом $\mathscr{C}$, то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа этой группы $\mathscr{C}$-отделима в ней тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.*

Отметим, что данная теорема не накладывает на граф групп практически никаких ограничений, кроме центральности реберных подгрупп. Однако в ее формулировке фигурирует весьма сложно устроенное семейство $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$. Приводимые далее теорема 3.2 и следствия 3.3, 3.4 предъявляют к графу групп больше требований, но дают более простые в применении критерии отделимости, основанные на использовании семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.

Будем говорить, что граф групп $\mathscr{G}(\Gamma)$ *имеет тип* (t) $(t = \overline{1,2})$, если для любой вершины $v \in \mathscr{V}$ подгруппа

$$H_v = \mathrm{sgp}\{H_{\varepsilon e} \mid e \in \mathscr{E},\ \varepsilon = \pm 1,\ v = e(\varepsilon)\}$$

лежит в центре группы G_v и выполняется свойство (t) из следующего набора:

(1) каждая подгруппа H_v $(v \in \mathscr{V})$ представляет собой прямое произведение порождающих ее подгрупп;

(2) граф Γ является деревом.

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа и Y — ее подгруппа. Будем говорить, что группа X *$\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе* Y, если для любой подгруппы $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ существует подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$, удовлетворяющая условию $N \cap Y = M$. Отметим, что свойство $\mathscr{C}$-регулярности тесно связано с $\mathscr{C}$-отделимостью и обобщает понятие *мощного элемента*, введенное в [31].

Теорема 3.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) и для любой вершины $v \in \mathscr{V}$ группа G_v $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе H_v;

2) $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (2) и для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$.

Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп и A — некоторая абелева группа. *Примарной* $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$*-компонентой* периодической части группы A будем называть примарную компоненту, соответствующую числу из множества $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$. Будем говорить, что группа A $\mathscr{C}$*-ограничена*, если в произвольной ее фактор-группе каждая примарная $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-компонента периодической части имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой $\mathscr{C}$-группы. Нильпотентную группу назовем $\mathscr{C}$*-ограниченной*, если она обладает хотя бы одним конечным центральным рядом с $\mathscr{C}$-ограниченными абелевыми факторами. Класс $\mathscr{C}$-ограниченных нильпотентных групп будем обозначать через $\mathscr{C}$-$\mathscr{BN}$. Отметим, что если класс $\mathscr{C}$ является корневым, то ввиду его замкнутости относительно взятия расширений порядки $\mathscr{C}$-групп не ограничены никаким целым числом и потому любая конечно порожденная нильпотентная группа $\mathscr{C}$-ограничена.

Следствие 3.3. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа* (1) *или* (2), *каждая группа G_v ($v \in \mathscr{V}$) принадлежит классу $\mathscr{C}$-$\mathscr{BN}$ и $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то все ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированные конечно порожденные абелевы подгруппы $\mathscr{C}$-отделимы.*

Отметим, что, в отличие от теоремы 3.2, в следствии 3.3 на класс $\mathscr{C}$ не накладывается требование замкнутости относительно взятия фактор-групп. Критерии $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ из теоремы 3.2 и следствия 3.3 содержат приводимые ниже предложения 8.2 и 8.4.

Напомним, что

– абелева группа называется *ограниченной* (в смысле А. И. Мальцева [2]), если в каждой ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части конечны;

– разрешимая группа называется *ограниченной*, если она обладает конечным субнормальным рядом с ограниченными абелевыми факторами.

Очевидно, что всякая полициклическая группа является конечно порожденной ограниченной разрешимой. В действительности верно и обратное [32].

Следствие 3.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ включает все простые числа. Пусть также $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа* (1) *или* (2) *и $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Если каждая группа G_v ($v \in \mathscr{V}$) является ограниченной разрешимой, то в группе $\mathfrak{G}$ все конечно порожденные абелевы подгруппы $\mathscr{C}$-отделимы.*

Отметим, что последнее утверждение служит частичным обобщением следствия 3 из [11].

§ 4. Об изоляторах подгрупп

Предложение 4.1. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа, Y — ее подгруппа. Если подгруппа Y $\mathscr{C}$-отделима в группе X, то она $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в этой группе.*

Доказательство. Предложение 5 из [33] утверждает, что сформулированное утверждение имеет место, если класс $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп. Если же класс $\mathscr{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ включает все простые числа и потому любая подгруппа оказывается $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированной.

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, $\mathfrak{P}$ — некоторое множество простых чисел, X — группа и Y — ее подгруппа. Легко видеть, что пересечение любого числа $\mathscr{C}$-отделимых ($\mathfrak{P}'$-изолированных) подгрупп группы X снова является $\mathscr{C}$-отделимой (соответственно $\mathfrak{P}'$-изолированной) подгруппой. Поэтому определены наименьшие $\mathscr{C}$-отделимая и $\mathfrak{P}'$-изолированная подгруппы, содержащие подгруппу Y. Мы будем называть их *$\mathscr{C}$-замыканием* и *$\mathfrak{P}'$-изолятором* подгруппы Y в группе X и обозначать соответственно через $\mathscr{C}$-$\mathfrak{Cl}(X,Y)$ и $\mathfrak{P}'$-$\mathfrak{Is}(X,Y)$. Легко видеть, что $\mathfrak{P}'$-изолятор подгруппы Y содержит множество $\mathfrak{P}'$-$\mathfrak{Rt}(X,Y)$ элементов группы X такое, что $x \in \mathfrak{P}'$-$\mathfrak{Rt}(X,Y)$ тогда и только тогда, когда $x^q \in Y$ для некоторого $\mathfrak{P}'$-числа q. Из предложения 4.1 следует также, что $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-$\mathfrak{Is}(X,Y) \leq \mathscr{C}$-$\mathfrak{Cl}(X,Y)$.

Предложение 4.2 [34, предложение 4]. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, X — $\mathscr{C}$-аппроксимируемая группа, Y — нильпотентная подгруппа группы X ступени c. Тогда подгруппа $\mathscr{C}$-$\mathfrak{Cl}(X,Y)$ также является нильпотентной группой ступени c.*

Предложение 4.3 [35, теорема 4.5]. *Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольное множество простых чисел, X — локально нильпотентная группа, Y — подгруппа группы X. Тогда $\mathfrak{P}'$-$\mathfrak{Is}(X,Y) = \mathfrak{P}'$-$\mathfrak{Rt}(X,Y)$.*

Предложение 4.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, X — $\mathscr{C}$-аппроксимируемая группа, Y — абелева подгруппа группы X. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Подгруппа $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-$\mathfrak{Is}(X,Y)$ является абелевой и совпадает с множеством $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-$\mathfrak{Rt}(X,Y)$.*

2. *Если Y — локально циклическая подгруппа, то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-$\mathfrak{Is}(X,Y)$ также локально циклическая подгруппа.*

Доказательство. Как уже было отмечено выше, имеет место включение $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-$\mathfrak{Is}(X,Y) \leq \mathscr{C}$-$\mathfrak{Cl}(X,Y)$. Поэтому утверждение 1 вытекает из предложений 4.2 и 4.3. Проверим утверждение 2.

Лемма. *Если $x, y \in X$, $\langle x\rangle$ — циклическая подгруппа, порожденная элементом x, и $y^q \in \langle x\rangle$ для некоторого $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-числа q, то подгруппа $\mathrm{sgp}\{x,y\}$ циклическая.*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что q — наименьшее положительное $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-число, удовлетворяющее условию $y^q \in \langle x\rangle$. Так как $y \in \mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-$\mathfrak{Is}(X,\langle x\rangle)$, то согласно утверждению 1 справедливо равенство $[x,y]=1$. Пусть числа k, d, q_1, k_1 таковы, что $y^q = x^k$, d — наибольший общий делитель чисел k и q, $q = dq_1$ и $k = dk_1$. Тогда d — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-число и $(y^{-q_1}x^{k_1})^d = 1$. Группа X $\mathscr{C}$-аппроксимируема и в силу предложения 4.1 не имеет $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения. Следовательно, $y^{-q_1}x^{k_1} = 1$ и $y^{q_1} \in \langle x\rangle$. Ввиду выбора числа q это означает, что $q = q_1$ и $1 = d = ku + qv$ для некоторых целых чисел u, v. Тогда

$$x = x^{ku+qv} = y^{qu}x^{qv} = (y^u x^v)^q, \quad y = y^{ku+qv} = y^{ku}x^{kv} = (y^u x^v)^k$$

и, стало быть, подгруппа $\mathrm{sgp}\{x,y\}$ порождается элементом $y^u x^v$.

Пусть $x, y \in \mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-$\mathfrak{Is}(X,Y)$. Тогда согласно утверждению 1 существуют такие $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-числа q и r, что $x^q, y^r \in Y$. Обозначая через z порождающий подгруппы $\mathrm{sgp}\{x^q, y^r\}$ и применяя лемму к элементам y и z, видим, что подгруппа $\mathrm{sgp}\{z,y\}$ циклическая и порождается некоторым элементом z_1. Снова применяя лемму, теперь уже к элементам z_1 и x, получаем, что элементы x и y принадлежат циклической подгруппе $\mathrm{sgp}\{z_1, x\}$.

Предложение 4.5. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, X — $\mathscr{C}$-аппроксимируемая группа, Y и Z — ее абелевы подгруппы и $[Y, Z] = 1$. Если подгруппа Y периодическая, то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, YZ) = Y \cdot \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, Z)$.*

Доказательство. Если класс $\mathscr{C}$ содержит непериодические группы, то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, YZ) = YZ$, $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, Z) = Z$ и требуемое равенство имеет место. Поэтому будем считать, что класс $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп и $x \in \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, YZ)$ — произвольный элемент. Поскольку группа X $\mathscr{C}$-аппроксимируема и подгруппа YZ абелева, из предложения 4.4 вытекает, что $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, YZ) = \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(X, YZ)$. Следовательно, $x^q = yz$ для некоторых элементов $y \in Y$, $z \in Z$ и $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-числа q. Так как Y — периодическая группа и группа X $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то порядок r элемента y конечен и по предложению 4.1 является $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-числом. Ввиду перестановочности элементов y, z справедливы соотношения $(x^r)^q = y^r z^r = z^r \in Z$ и, стало быть, $x^r \in \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, Z)$. Таким образом, $x^q, x^r \in Y \cdot \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, Z)$ и, поскольку числа q и r взаимно просты, $x \in Y \cdot \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, Z)$. Тем самым доказано соотношение $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, YZ) \leq Y \cdot \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X, Z)$. Противоположное включение очевидно.

§ 5. Доказательство теоремы 2.1

Предложение 5.1 [34, предложение 5]. *Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений с конечным числом сомножителей, X — $\mathscr{C}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X. Если подгруппа Y тривиально пересекается с некоторой подгруппой из семейства $\mathscr{C}^*(X)$, то она $\mathscr{C}$-отделима в группе X.*

Следующее утверждение служит частным случаем теоремы 2.4 из [36].

Предложение 5.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и $\mathscr{C}\text{-}\mathscr{BN}_{\mathfrak{P}(\mathscr{C})}$ — класс всех $\mathscr{C}\text{-}\mathscr{BN}$-групп без $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения. Пусть также X — $\mathscr{C}\text{-}\mathscr{BN}_{\mathfrak{P}(\mathscr{C})}$-аппроксимируемая группа, Y — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа группы X. Если подгруппа Y тривиально пересекается с некоторой подгруппой из семейства $\mathscr{C}\text{-}\mathscr{BN}^*_{\mathfrak{P}(\mathscr{C})}(X)$, то она $\mathscr{C}$-отделима в группе X.*

Предложение 5.3. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп. Если X — свободная группа, то каждая ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная циклическая подгруппа $\mathscr{C}$-отделима.*

Доказательство. Пусть Y — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная циклическая подгруппа группы X с порождающим y и $\mathscr{FGN}_0$ — класс всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения. Поскольку группа X $\mathscr{FGN}_0$-аппроксимируема [37], найдется подгруппа $M \in \mathscr{FGN}^*_0(X)$, не содержащая элемента y. Так как фактор-группа X/M не имеет кручения, то в действительности $Y \cap M = 1$ и по предложению 5.1 подгруппа Y $\mathscr{FGN}_0$-отделима в группе X. Если класс $\mathscr{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то в силу своей замкнутости относительно взятия подгрупп и расширений он включает все полициклические группы, обладающие субнормальными рядами с бесконечными циклическими факторами. В частности, $\mathscr{FGN}_0 \subseteq \mathscr{C}$ и потому подгруппа Y оказывается $\mathscr{C}$-отделимой. Если же класс $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп и $\mathscr{C}\text{-}\mathscr{BN}_0$ — класс всех $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-групп без кручения, то ввиду отмеченного в § 3 $\mathcal{FGN}_0 \subseteq \mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_0$ и $\mathcal{C}$-отделимость подгруппы Y в группе X обеспечивается предложением 5.2.

Предложение 5.4. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп и $\mathcal{D}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп. Если в некоторой группе X все $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированные $\mathcal{D}$-подгруппы $\mathcal{C}$-отделимы, то и в любом расширении группы X при помощи $\mathcal{C}$-группы все $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированные $\mathcal{D}$-подгруппы являются $\mathcal{C}$-отделимыми.*

Доказательство. Пусть Y — некоторое расширение группы X при помощи $\mathcal{C}$-группы, Z — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная $\mathcal{D}$-подгруппа группы Y и $y \in Y \setminus Z$ — произвольный элемент. Нам достаточно указать подгруппу $N \in \mathcal{C}^*(Y)$, удовлетворяющую условию $y \notin ZN$. Если $y \notin ZX$, то искомой является подгруппа X. Поэтому далее будем считать, что $y \in ZX$ и $y = zx$ для некоторых $z \in Z$, $x \in X$.

Если элемент $g \in X$ и простое число $q \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ таковы, что $g^q \in Z \cap X$, то $g \in Z$ в силу $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированности подгруппы Z в группе Y и потому $g \in Z \cap X$. Стало быть, подгруппа $Z \cap X$ $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группе X, принадлежит классу $\mathcal{D}$ ввиду замкнутости последнего относительно взятия подгрупп и $\mathcal{C}$-отделима в X согласно условию предложения. Так как $y \notin Z$, то $x \notin Z \cap X$ и ввиду доказанного существует подгруппа $M \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющая соотношению $x \notin (Z \cap X)M$.

Зафиксируем произвольную систему S представителей смежных классов группы Y по подгруппе X и положим $N = \bigcap_{s \in S} s^{-1}Ms$. Тогда подгруппа N нормальна в группе Y, а фактор-группа X/N по теореме Ремака [38, теорема 4.3.9] вкладывается в декартово произведение $P = \prod_{s \in S} X/s^{-1}Ms$. Так как все сомножители этого произведения изоморфны $\mathcal{C}$-группе X/M и индексируются элементами $\mathcal{C}$-группы Y/X, то по определению корневого класса $P \in \mathcal{C}$. Ввиду замкнутости класса $\mathcal{C}$ относительно взятия подгрупп и расширений отсюда следует, что $X/N \in \mathcal{C}$ и $Y/N \in \mathcal{C}$. Таким образом, $N \in \mathcal{C}^*(Y)$ и $N \leq M$.

Предполагая, что $y \in ZN$ и $y = z_1u$ для некоторых $z_1 \in Z$, $u \in N$, получаем, что $zx = z_1u$, $u \in M \leq X$, $z^{-1}z_1 = xu^{-1} \in Z \cap X$ и $x = (z^{-1}z_1)u \in (Z \cap X)M$ вопреки выбору подгруппы M. Стало быть, $y \notin ZN$ и подгруппа N искомая.

Предложение 5.5 [29, предложение 3.4]. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, $N \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$ и $N \cap H_{\varepsilon e} = 1$ для всех $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Тогда существует подгруппа $M \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{G})$, представляющая собой свободное произведение некоторой свободной группы и групп, вкладывающихся в подгруппы вида $N \cap G_v$ ($v \in \mathcal{V}$).*

Доказательство теоремы 2.1. Пусть N — ядро гомоморфизма группы $\mathfrak{G}$ на группу из класса $\mathcal{C}$, действующего инъективно на всех вершинных группах, $\mathcal{ID}$ — класс групп, каждая из которых удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству (не обязательно одному и тому же для всех групп). Применяя к классу $\mathcal{C}$ и подгруппе N предложение 5.5, получаем, что группа $\mathfrak{G}$ представляет собой расширение некоторой свободной группы M при помощи $\mathcal{C}$-группы. Так как любая $\mathcal{ID}$-подгруппа свободной группы циклическая, согласно предложению 5.3 в группе M все $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированные $\mathcal{ID}$-подгруппы $\mathcal{C}$-отделимы. Поскольку класс $\mathcal{ID}$ замкнут относительно взятия подгрупп, отсюда и из предложения 5.4 следует, что и в группе $\mathfrak{G}$ все $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированные $\mathcal{ID}$-подгруппы $\mathcal{C}$-отделимы. Остается заметить, что в любом расширении свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы единичная подгруппа $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована и принадлежит классу $\mathcal{ID}$. Поэтому из $\mathcal{C}$-отделимости всех $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированных $\mathcal{ID}$-подгрупп вытекает $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$.

§ 6. О фундаментальных группах графов групп

Пусть для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ в группе G_v выбрана некоторая нормальная подгруппа R_v. Как и в [17], семейство $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ будем называть *системой совместимых нормальных подгрупп* группы $\mathfrak{G}$, если для любого ребра $e \in \mathscr{E}$ справедливо равенство $(R_{e(1)} \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1} = (R_{e(-1)} \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1}$. Пусть

$$\overline{G}_v = G_v/R_v \ (v \in \mathscr{V}), \quad R_e = (R_{e(\pm 1)} \cap H_{\pm e})\varphi_{\pm e}^{-1} \ (e \in \mathscr{E}),$$
$$\overline{H}_e = H_e/R_e \ (e \in \mathscr{E}), \quad \overline{H}_{\varepsilon e} = H_{\varepsilon e}R_{e(\varepsilon)}/R_{e(\varepsilon)} \ (e \in \mathscr{E}, \ \varepsilon = \pm 1).$$

Легко видеть, что отображение $\overline{\varphi}_{\varepsilon e}\colon \overline{H}_e \to \overline{G}_{e(\varepsilon)}$ $(e \in \mathscr{E}, \ \varepsilon = \pm 1)$, переводящее смежный класс hR_e $(h \in H_e)$ в элемент $(h\varphi_{\varepsilon e})R_{e(\varepsilon)}$, корректно определено и является изоморфизмом группы $\overline{H}_e$ на подгруппу $\overline{H}_{\varepsilon e}$. Поэтому наряду с исходным графом

$$\mathscr{G}(\Gamma) = (\Gamma, \ G_v \ (v \in \mathscr{V}), \ H_e \ (e \in \mathscr{E}), \ \varphi_{\varepsilon e} \ (e \in \mathscr{E}, \ \varepsilon = \pm 1))$$

можно рассмотреть граф групп

$$\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma) = (\Gamma, \ \overline{G}_v \ (v \in \mathscr{V}), \ \overline{H}_e \ (e \in \mathscr{E}), \ \overline{\varphi}_{\varepsilon e} \ (e \in \mathscr{E}, \ \varepsilon = \pm 1)),$$

в котором ребрам сопоставлены те же направления, что и в графе $\mathscr{G}(\Gamma)$.

Если представление фундаментальной группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ соответствует дереву $\mathscr{T}$ (а мы всегда будем предполагать, что это именно так), то тождественное отображение образующих группы $\mathfrak{G}$ в группу $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ определяет сюръективный гомоморфизм, который далее обозначается через $\rho_{\mathscr{R}}$. Нетрудно показать, что ядро данного гомоморфизма совпадает с нормальным замыканием в группе $\mathfrak{G}$ множества $\bigcup_{v \in \mathscr{V}} R_v$ и $\ker \rho_{\mathscr{R}} \cap G_v = R_v$ для всех $v \in \mathscr{V}$.

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп. Назовем систему $\mathscr{R}$ *$\mathscr{C}$-допустимой*, если существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, действующий инъективно на всех вершинных группах $\overline{G}_v$ $(v \in \mathscr{V})$.

Предложение 6.1 [17, предложение 2]. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп.*

1. *Если N — нормальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то семейство $\{N \cap G_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ является системой совместимых нормальных подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Если $N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, то данная система $\mathscr{C}$-допустима.*

2. *Пусть $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ — $\mathscr{C}$-допустимая система совместимых нормальных подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Тогда найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ такая, что $R_v = N \cap G_v$ для всех $v \in \mathscr{V}$.*

Всюду далее, если N — нормальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то соответствующие системе совместимых нормальных подгрупп $\mathscr{R} = \{N \cap G_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma)$ и гомоморфизм $\rho_{\mathscr{R}}$ будем обозначать через $\mathscr{G}_N(\Gamma)$ и ρ_N. Из предложения 6.1 и теоремы 2.1 вытекает

Предложение 6.2. *Если $\mathscr{C}$ — корневой класс групп и $N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, то группа $\pi_1(\mathscr{G}_N(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема и каждая ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа, удовлетворяющая нетривиальному тождеству, $\mathscr{C}$-отделима.*

Как и в [1], если Δ — непустой связный подграф графа Γ, то через $\mathscr{G}(\Delta)$ будем обозначать граф групп, вершинам и ребрам которого сопоставлены те же группы, направления и гомоморфизмы, что и в графе $\mathscr{G}(\Gamma)$. Указанный подграф Δ будем называть *допустимым*, если граф $\Delta \cap \mathscr{T}$ служит максимальным поддеревом в графе Δ. Всюду далее, говоря о допустимом подграфе Δ, будем предполагать, что представление группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ соответствует дереву $\Delta \cap \mathscr{T}$. Нетрудно показать (см., например, [17, предложение 1]), что при таком предположении тождественное отображение образующих группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ в группу $\mathfrak{G}$ определяет инъективный гомоморфизм и потому группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ можно считать подгруппой группы $\mathfrak{G}$.

Предложение 6.3 [17, предложение 3]. *Пусть Δ — допустимый подграф графа Γ и представление группы $\mathfrak{H} = \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ соответствует дереву $\Delta \cap \mathscr{T}$. Если N — нормальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $M = N \cap \mathfrak{H}$, то гомоморфизм ρ_N продолжает гомоморфизм $\rho_M\colon \mathfrak{H} \to \pi_1(\mathscr{G}_M(\Delta))$.*

Предложение 6.4 [1, предложение 8]. *Для любых конечных подмножеств $\mathscr{V}' \subseteq \mathscr{V}$, $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}$, $S \subseteq \mathfrak{G}$ существует допустимый конечный подграф Δ графа Γ, удовлетворяющий условию $S \subseteq \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ и содержащий все вершины из $\mathscr{V}'$ и все ребра из $\mathscr{E}'$.*

§ 7. Доказательства теоремы 2.3 и следствия 2.4

Предложение 7.1 [17, предложение 4]. *Пусть Ω — непустое семейство нормальных подгрупп группы $\mathfrak{G}$ и выполняются следующие условия:*

(α) $\forall L, M \in \Omega\ \exists N \in \Omega\ N \leq L \cap M$;

(β) $\forall v \in \mathscr{V}\ \bigcap_{N \in \Omega}(N \cap G_v) = 1$;

(γ) $\forall e \in \mathscr{E},\ \varepsilon = \pm 1\ \bigcap_{N \in \Omega} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) = H_{\varepsilon e}$.

Пусть также граф Γ конечен. Если вершина $v \in \mathscr{V}$ и подгруппа $X \leq G_v$ таковы, что $\bigcap_{N \in \Omega} X(N \cap G_v) = X$, то для каждого элемента $g \in \mathfrak{G} \setminus X$ найдется подгруппа $N \in \Omega$, удовлетворяющая соотношению $g\rho_N \notin X\rho_N$. В частности, если $g \in \mathfrak{G} \setminus \{1\}$, то $g\rho_N \neq 1$ для некоторой подгруппы $N \in \Omega$.

Всюду далее, если Ω — непустое семейство подгрупп группы $\mathfrak{G}$, то через $\mathfrak{D}_\Omega(\mathfrak{G})$ будем обозначать семейство пар подгрупп той же группы, определенное следующим образом: $(X, Y) \in \mathfrak{D}_\Omega(\mathfrak{G})$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух утверждений:

(λ_Ω) X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы G_v $(v \in \mathscr{V})$, $Y = 1$ и $\bigcap_{N \in \Omega} X(N \cap G_v) \neq X$;

(μ_Ω) X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathscr{E}, \varepsilon = \pm 1)$, Y — бесконечная циклическая подгруппа, $[X, Y] = 1$, $Y \cap G_{e(\varepsilon)} = 1$ и $\bigcap_{N \in \Omega} X(N \cap G_{e(\varepsilon)}) \neq X$.

Положим также $\mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G}) = \{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}_\Omega(\mathfrak{G})\}$.

Предложение 7.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, Ω — непустое подмножество семейства $\mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ и выполняются условия (α)–(γ) из формулировки предложения 7.1. Пусть также Δ — допустимый подграф графа Γ, $\mathfrak{H} = \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ и $\Xi = \{N \cap \mathfrak{H} \mid N \in \Omega\}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Семейство Ξ непусто и содержится в $\mathscr{C}^*(\mathfrak{H})$; граф Δ, группа $\mathfrak{H}$ и семейство Ξ удовлетворяют условиям (α)–(γ).*

2. *Если A — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$, и $A \leq \mathfrak{H}$, то подгруппа A $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе $\mathfrak{H}$ и не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_\Xi(\mathfrak{H})$.*

3. *Если A — абелева подгруппа группы $\mathfrak{H}$, $g \in \mathfrak{H} \setminus A$, $N \in \Omega$ и $M = N \cap \mathfrak{H}$, то из соотношения $g\rho_M \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{H}\rho_M, A\rho_M)$ следует, что $g\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$.*

Доказательство. 1. Очевидно, что семейство Ξ непусто и удовлетворяет условию (α). Из его определения легко следует, что для любой подгруппы X группы $\mathfrak{G}$ и для любой вершины v графа Δ имеет место равенство

$$\bigcap_{N\in\Omega} X(N\cap G_v) = \bigcap_{M\in\Xi} X(M\cap G_v).$$

Поэтому для графа Δ, группы $\mathfrak{H}$ и семейства Ξ выполняются условия (β), (γ) и, кроме того, $\mathfrak{D}_\Xi(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{D}_\Omega(\mathfrak{G})$ и $\mathfrak{A}_\Xi(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$. Остается заметить, что если $N\in\Omega$ и $M = N\cap\mathfrak{H}$, то $N\in\mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{H}/(N\cap\mathfrak{H}) \cong \mathfrak{H}N/N \leq \mathfrak{G}/N \in \mathscr{C}$ и, поскольку класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, $\mathfrak{H}/(N\cap\mathfrak{H}) \in \mathscr{C}$. Следовательно, $\Xi \subseteq \mathscr{C}^*(\mathfrak{H})$.

2. Из установленного выше соотношения $\mathfrak{A}_\Xi(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$ вытекает, что подгруппа A не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_\Xi(\mathfrak{H})$. Ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированность в группе $\mathfrak{H}$ очевидна.

3. В силу предложения 6.3 гомоморфизм ρ_N продолжает гомоморфизм ρ_M, откуда $g\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{H}\rho_N, A\rho_N)$. Из предложения 4.4 и $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}\rho_N$, имеющей место согласно предложению 6.2, следует, что подгруппа $\mathfrak{I}_N = \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$ абелева и совпадает с множеством $\mathfrak{R}_N = \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$. Предполагая, что $g\rho_N \in \mathfrak{R}_N$, из соотношений $g\rho_N \in \mathfrak{H}\rho_N$ и $A\rho_N \leq \mathfrak{H}\rho_N$ получаем, что

$$g\rho_N \in \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(\mathfrak{H}\rho_N, A\rho_N) \leq \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{H}\rho_N, A\rho_N)$$

в противоречие с установленным ранее. Значит, $g\rho_N \notin \mathfrak{I}_N$.

При доказательстве следующего предложения без дополнительных пояснений будем использовать понятия и обозначения, введенные в § 2 статьи [1]. Для ссылок на предложения 3, 5 и 6 этой работы будем применять выражения I.3, I.5 и I.6 соответственно.

Предложение 7.3. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, Γ — конечный граф, Ω — непустое подмножество семейства $\mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ и выполняются условия (α)–(γ) из формулировки предложения 7.1. Если A — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$, не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$, то для любого элемента $g\in\mathfrak{G}\setminus A$ найдется подгруппа $N\in\Omega$ такая, что $g\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что для любых подгруппы $N\in\Omega$ и элемента $u\in\mathfrak{G}$ справедливо равенство

$$\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, (u^{-1}Au)\rho_N) = (u\rho_N)^{-1}\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)(u\rho_N)$$

и потому из соотношения $(u^{-1}gu)\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, (u^{-1}Au)\rho_N)$ следует, что $g\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$. Таким образом, элемент g и подгруппу A при необходимости можно заменить их образами относительно некоторого внутреннего автоморфизма группы $\mathfrak{G}$.

Доказательство будем вести индукцией по числу ребер, не принадлежащих дереву $\mathscr{T}$, причем сначала выполним индуктивный шаг, а уже затем проверим базу индукции. Предположим, что имеется по крайней мере одно не входящее в $\mathscr{T}$ ребро f, и обозначим через Δ граф, получающийся из Γ путем удаления данного ребра. Тогда группа $\mathfrak{G}$ представляет собой HNN-расширение группы $\mathfrak{B} = \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ с проходной буквой t_f и связанными подгруппами H_{+f} и H_{-f}.

Лемма 1. *Пусть x — произвольный элемент указанного выше HNN-расширения и $x_0 t_f^{\varepsilon_1} x_1 \dots t_f^{\varepsilon_n} x_n$ — некоторая его приведенная запись. Тогда найдется такая подгруппа $M \in \Omega$, что для любой подгруппы $N \in \Omega$, лежащей в M, справедливы следующие утверждения:*

а) *в группе $\mathfrak{G}\rho_N$ (рассматриваемой как HNN-расширение группы $\mathfrak{B}\rho_N$ с проходной буквой t_f и связанными подгруппами $H_{\pm f}\rho_N$) произведение*

$$x_0\rho_N t_f^{\varepsilon_1} x_1\rho_N \dots t_f^{\varepsilon_n} x_n\rho_N$$

служит приведенной записью элемента $x\rho_N$; в частности, если элемент x непримитивен, то элемент $x\rho_N$ также непримитивен;

б) *если $x_0 = 1$ и $t_f^{\varepsilon_1} x_1 \dots t_f^{\varepsilon_n} x_n$ — циклически приведенная запись элемента x, то $t_f^{\varepsilon_1} x_1\rho_N \dots t_f^{\varepsilon_n} x_n\rho_N$ — циклически приведенная запись элемента $x\rho_N$.*

Доказательство. Для каждого $i \in \{0, \dots, n\}$ определим подгруппу $L_i \in \Omega$ следующим образом. Если $1 \le i \le n-1$, $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$ и, следовательно, $x_i \notin H_{-\varepsilon_i f}$, воспользуемся предложением 7.1 и найдем подгруппу $L_i \in \Omega$, удовлетворяющую условию $x_i\rho_{L_i} \notin H_{-\varepsilon_i f}\rho_{L_i}$. Если $x_0 = 1$, $\varepsilon_n = -\varepsilon_1$ и $x_n \notin H_{-\varepsilon_n f}$, аналогичным образом выберем подгруппу $L_n \in \Omega$ такую, что $x_n\rho_{L_n} \notin H_{-\varepsilon_n f}\rho_{L_n}$. В остальных случаях в качестве L_i возьмем произвольную подгруппу (непустого по условию) семейства Ω.

Пусть $L = \bigcap_{0 \le i \le n} L_i$, $N \in \Omega$ и $N \le L$. Тогда $\ker\rho_N \le \ker\rho_{L_i}$ для любого $i \in \{0, \dots, n\}$. Отсюда в силу выбора подгруппы L_i $(0 \le i \le n)$ следует, что если $1 \le i \le n-1$ и $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$, то $x_i\rho_N \notin H_{-\varepsilon_i f}\rho_N$, а если $x_0 = 1$, $\varepsilon_n = -\varepsilon_1$ и $x_n \notin H_{-\varepsilon_n f}$, то $x_n\rho_N \notin H_{-\varepsilon_n f}\rho_N$. Значит, искомой является любая подгруппа $M \in \Omega$, лежащая в L (существование таких подгрупп гарантируется условием (α)).

Ввиду сделанного в начале доказательства замечания и предложения I.5 без потери общности можно считать, что подгруппа A либо содержится в группе $\mathfrak{B}$, либо раскладывается в прямое произведение $X \times \langle y \rangle$, где y — непримитивный циклически приведенный элемент, $X \le H_{+f}$ или $X \le H_{-f}$. Положим $\Xi = \{N \cap \mathfrak{B} \mid N \in \Omega\}$ и рассмотрим три случая.

Случай 1. $A \le \mathfrak{B}$, $g \in \mathfrak{B}$.

Так как Δ является, очевидно, допустимым подграфом графа Γ, ввиду утверждений 1 и 2 предложения 7.2 граф Δ, группа $\mathfrak{B}$, семейство Ξ и подгруппа A удовлетворяют условиям настоящего предложения. Поскольку $g \in \mathfrak{B} \setminus A$, отсюда и из индуктивного предположения вытекает существование подгруппы $M \in \Xi$, удовлетворяющей условию $g\rho_M \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{B}\rho_M, A\rho_M)$. Если подгруппа $N \in \Omega$ такова, что $M = N \cap \mathfrak{B}$, то согласно утверждению 3 предложения 7.2 $g\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$. Следовательно, подгруппа N искомая.

Случай 2. $A \le \mathfrak{B}$, $g \notin \mathfrak{B}$.

Так как $g \notin \mathfrak{B}$, согласно лемме 1 найдется подгруппа $N \in \Omega$, удовлетворяющая условию $g\rho_N \notin \mathfrak{B}\rho_N$. Покажем, что $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N) \le \mathfrak{B}\rho_N$ и, стало быть, подгруппа N искомая.

В самом деле, если класс $\mathscr{C}$ содержит непериодические группы, то

$$\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N) = A\rho_N \le \mathfrak{B}\rho_N.$$

Поэтому будем считать, что класс $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп. Так как $N \in \Omega \subseteq \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ и

$$G_v\rho_N \cong G_v/G_v \cap N \cong G_vN/N \le \mathfrak{G}/N$$

для всех $v \in \mathscr{V}$, то $H_{+f}\rho_N$ и $H_{-f}\rho_N$ — периодические $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-группы. В силу предложения 6.2 группа $\mathfrak{G}\rho_N$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема и, следовательно, не имеет $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения. Значит, подгруппы $H_{+f}\rho_N$ и $H_{-f}\rho_N$ $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированы в группе $\mathfrak{G}\rho_N$ и, в частности,

$$\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(\mathfrak{G}\rho_N, H_{+f}\rho_N) = H_{+f}\rho_N, \quad \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(\mathfrak{G}\rho_N, H_{-f}\rho_N) = H_{-f}\rho_N.$$

Ввиду предложения I.6 отсюда следует, что $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N) \leq \mathfrak{B}\rho_N$. Остается заметить, что подгруппа $A\rho_N$ абелева и по предложению 4.4

$$\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N) = \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N).$$

Случай 3. $A = X \times \langle y \rangle$, где y — непримитивный циклически приведенный элемент, $X \leq H_{+f}$ или $X \leq H_{-f}$.

Пусть $\delta = \pm 1$ — такое число, что $X \leq H_{\delta f}$, и r — наибольший $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-делитель числа $\ell(y)$. Так как подгруппа A $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе $\mathfrak{G}$ и $g \notin A$, то $g \notin X$ и $g^r \notin A$. В частности, если $\ell(g)r = \ell(y)s$ для некоторого целого $s > 0$, то $y^{-s}g^r, y^{-s}g^{-r} \notin X$. Поскольку элемент y циклически приведен и непримитивен, элемент y^n согласно предложению I.3 также является непримитивным для любого $n > 0$. Значит, $\langle y \rangle \cap G_{f(\delta)} = 1$ и, если подгруппа $\overline{X} = \bigcap_{N\in\Omega} X(N \cap G_{f(\delta)})$ отлична от X, то для пары подгрупп $(X, \langle y \rangle)$ справедливо утверждение (μ_Ω). Но тогда $A \in \mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$ в противоречие с предположением. Значит, $\overline{X} = X$ и в силу предложения 7.1 существуют подгруппы $L_0, L_1, L_{-1} \in \Omega$ такие, что $g\rho_{L_0} \notin X\rho_{L_0}$ и, если $\ell(g)r = \ell(y)s$ для некоторого целого $s > 0$, то $(y^{-s}g^{\theta r})\rho_{L_\theta} \notin X\rho_{L_\theta}$ $(\theta = \pm 1)$.

Пользуясь леммой 1 и условием (α), выберем подгруппу $N \in \Omega$ так, чтобы выполнялись соотношения $N \leq L_{-1} \cap L_0 \cap L_1$, $\ell(g\rho_N) = \ell(g)$, $\ell(y\rho_N) = \ell(y)$ и элемент $y\rho_N$ по-прежнему являлся циклически приведенным. Отметим, что тогда $\ker \rho_N \leq \ker \rho_{L_i}$, $i \in \{-1, 0, 1\}$. Поэтому $g\rho_N \notin X\rho_N$ и, если $\ell(g)r = \ell(y)s$ для некоторого целого $s > 0$, то $(y^{-s}g^{\theta r})\rho_N \notin X\rho_N$ $(\theta = \pm 1)$.

Так как $y\rho_N$ — непримитивный циклически приведенный элемент, то в силу предложения I.3 из него не могут извлекаться корни сколь угодно высокой степени. Поскольку группа $\mathfrak{G}\rho_N$ согласно предложению 6.2 $\mathscr{C}$-аппроксимируема, из предложения 4.4 теперь следует, что подгруппа $\overline{Y}_N = \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, \langle y\rho_N \rangle)$ циклическая. Обозначим через z_N такой ее порождающий, что $z_N^q = y\rho_N$ для некоторого $q > 0$. Тогда согласно предложению I.3 z_N — непримитивный циклически приведенный элемент и $q \mid \ell(y\rho_N) = \ell(y)$. Поскольку q является, очевидно, $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-числом, отсюда следует, что $q \mid r$.

Обозначим для краткости подгруппу $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$ через $\overline{A}_N$ и предположим, что $g\rho_N \in \overline{A}_N$. Если класс $\mathscr{C}$ содержит непериодические группы, то

$$\overline{A}_N = A\rho_N = X\rho_N \cdot \langle y\rho_N \rangle = X\rho_N \cdot \overline{Y}_N.$$

В противном случае подгруппа $X\rho_N$ содержится в периодической $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-группе $H_{\delta f}\rho_N$ и из предложения 4.5 вытекает, что снова $\overline{A}_N = X\rho_N \cdot \overline{Y}_N$. Таким образом, для некоторых $\xi = \pm 1$, $x \in X$, $n \geq 0$ имеет место равенство $(g\rho_N)^\xi = (x\rho_N)z_N^n$.

Если $n = 0$, то $g\rho_N \in X\rho_N$ вопреки установленному ранее. Следовательно, $n > 0$ и в силу предложения I.3 элемент $(x\rho_N)^{-1}(g\rho_N)^\xi = z_N^n$ циклически приведен и имеет длину $\ell(z_N)n$. В то же время очевидно, что $\ell((x\rho_N)^{-1}(g\rho_N)^\xi) = \ell(g\rho_N) = \ell(g)$ и потому $\ell(g) = \ell(z_N)n$. Так как $z_N^q = y\rho_N$ и $r = qk$ для некоторого целого $k > 0$, то $z_N^r = (y\rho_N)^k$ и снова ввиду предложения I.3 $\ell(z_N)r = \ell(y\rho_N)k$. Следовательно, $\ell(g)r = \ell(z_N)rn = \ell(y\rho_N)kn = \ell(y)kn$ и согласно выбору подгруппы N имеют место соотношения $(y^{-kn}g^{\theta r})\rho_N \notin X\rho_N$ ($\theta = \pm 1$). Но поскольку подгруппа $\overline{A}_N$ ввиду предложения 4.4 абелева, из равенства $(g\rho_N)^{\xi} = (x\rho_N)z_N^n$ вытекает, что $(g\rho_N)^{\xi r} = z_N^{rn}(x\rho_N)^r = (y\rho_N)^{kn}(x\rho_N)^r$ и $(y\rho_N)^{-kn}(g\rho_N)^{\xi r} \in X\rho_N$. Полученное противоречие доказывает, что $g\rho_N \notin \overline{A}_N$ и подгруппа N является искомой.

Таким образом, индуктивный шаг выполнен. Предположим теперь, что граф Γ является деревом, и для доказательства предложения в этом случае воспользуемся индукцией по числу вершин. Если Γ содержит только одну вершину v, то A — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы G_v и, так как $A \notin \mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$, то $\bigcap_{N\in\Omega} AN = A$. Следовательно, $g \notin AN$ для некоторой подгруппы $N \in \Omega$, и эта подгруппа оказывается искомой, поскольку отображение ρ_N в данном случае представляет собой естественный гомоморфизм $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/N$, а любая подгруппа $\mathscr{C}$-группы $\mathfrak{G}/N$ $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в силу предложения 4.1.

Далее будем считать, что в дереве Γ имеется по крайней мере одно ребро $f \in \mathscr{E}$. При его удалении Γ распадается на две компоненты связности; обозначим через Δ_ε ($\varepsilon = \pm 1$) ту из них, которая содержит вершину $f(\varepsilon)$, и через $\mathfrak{B}_\varepsilon$ — группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Delta_\varepsilon))$. Тогда группа $\mathfrak{G}$ представляет собой свободное произведение групп $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_{-1}$ с объединенными подгруппами H_{+f} и H_{-f}.

Лемма 2. *Пусть x — произвольный элемент указанного свободного произведения и $x_1x_2\ldots x_n$ — некоторая его приведенная запись. Тогда найдется такая подгруппа $M \in \Omega$, что для любой подгруппы $N \in \Omega$, лежащей в M, справедливы следующие утверждения:*

а) *в группе $\mathfrak{G}\rho_N$ (рассматриваемой как свободное произведение групп $\mathfrak{B}_1\rho_N$ и $\mathfrak{B}_{-1}\rho_N$ с объединенными подгруппами $H_{\pm f}\rho_N$) произведение $x_1\rho_N x_2\rho_N\ldots x_n\rho_N$ служит приведенной записью элемента $x\rho_N$; в частности, если элемент x непримитивен (циклически приведен), то и элемент $x\rho_N$ непримитивен (соответственно циклически приведен);*

б) *если $x \in \mathfrak{B}_\varepsilon \setminus H_{\varepsilon f}$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, то $x\rho_N \in \mathfrak{B}_\varepsilon\rho_N \setminus H_{\varepsilon f}\rho_N$.*

Доказательство. Если $x \in H_{+f} = H_{-f}$, утверждение очевидно. Поэтому далее можно считать, что для каждого $i \in \{1,\ldots,n\}$ существует число $\varepsilon_i = \pm 1$ такое, что $x_i \in \mathfrak{B}_{\varepsilon_i} \setminus H_{\varepsilon_i f}$ и, если $i < n$, то $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$. Пользуясь предложением 7.1, для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ можно выбрать подгруппу $L_i \in \Omega$, удовлетворяющую условию $x_i\rho_{L_i} \in \mathfrak{B}_{\varepsilon_i}\rho_{L_i} \setminus H_{\varepsilon_i f}\rho_{L_i}$. Если $N \in \Omega$ и $N \leq L_i$, то $\ker\rho_N \leq \ker\rho_{L_i}$ и, следовательно, $x_i\rho_N \in \mathfrak{B}_{\varepsilon_i}\rho_N \setminus H_{\varepsilon_i f}\rho_N$. Поэтому искомой является подгруппа $M \in \Omega$, лежащая в $\bigcap_{1\leq i\leq n} L_i$, существование которой обеспечивается условием (α).

Как и выше, ввиду сделанного в начале доказательства замечания и предложения I.5 без потери общности можно считать, что подгруппа A либо содержится в группе $\mathfrak{B}_\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, либо раскладывается в прямое произведение $X \times \langle y\rangle$, где y — непримитивный циклически приведенный элемент и $X \leq H_{+f} = H_{-f}$. Поэтому достаточно рассмотреть три случая: $A \leq \mathfrak{B}_\varepsilon$ и $g \in \mathfrak{B}_\varepsilon$; $A \leq \mathfrak{B}_\varepsilon$ и $g \notin \mathfrak{B}_\varepsilon$; $A = X\times\langle y\rangle$, где y — непримитивный циклически приведенный элемент и $X \leq H_{+f} = H_{-f}$. Рассуждения, используемые в каждом из них, слово в слово повторяют те, которые применялись выше при изучении случаев 1, 2 и 3. Нужно лишь положить $\Xi_\varepsilon = \{N \cap \mathfrak{B}_\varepsilon \mid N \in \Omega\}$, заменить символы Δ, $\mathfrak{B}$ и Ξ на Δ_ε, $\mathfrak{B}_\varepsilon$ и Ξ_ε соответственно, а также во втором и третьем случаях сослаться на лемму 2 вместо леммы 1.

Доказательство теоремы 2.3. I. Необходимость. Пусть $(X,Y) \in \mathfrak{D}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$, $A = XY$ и Z — подгруппа группы $\mathfrak{G}$, совпадающая с G_v (если выполняется условие $(\lambda^1_{\mathscr{C}})$) или с $G_{e(\varepsilon)}$ (если выполняется условие $(\mu^1_{\mathscr{C}})$). Тогда согласно определению семейства $\mathfrak{D}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ $X \leq Z$, $Y \cap Z = 1$ и подгруппа $\overline{X} = \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} X(N \cap Z)$ отлична от X. Пусть $g \in \overline{X} \setminus X$. Тогда $g \in \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} AN$ и, значит, элемент g переходит в элемент подгруппы A при каждом гомоморфизме группы $\mathfrak{G}$ на группу из класса $\mathscr{C}$. Если предположить, что $g \in A$ и $g = xy$, где $x \in X$, $y \in Y$, то поскольку $g \in \overline{X} \leq Z$, из соотношений $X \leq Z$, $Y \cap Z = 1$ вытекает, что $y = 1$ и $g \in X$ вопреки выбору элемента g. Следовательно, $g \notin A$ и подгруппа A не отделима в группе $\mathfrak{G}$ классом $\mathscr{C}$.

Таким образом, все подгруппы из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ не являются $\mathscr{C}$-отделимыми в $\mathfrak{G}$. Очевидно, что тем же свойством обладают и подгруппы, сопряженные с ними.

Достаточность. Пусть A — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$, не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$, и $g \in \mathfrak{G} \setminus A$ — произвольный элемент. Нам достаточно указать подгруппу $L \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, удовлетворяющую соотношению $g \notin AL$.

Пусть S — конечное порождающее множество группы A. Согласно предложению 6.4, применяемому к множествам $\mathscr{V}' = \varnothing$, $\mathscr{E}' = \varnothing$ и $S \cup \{g\}$, существует конечный допустимый подграф Δ графа Γ такой, что $S \cup \{g\} \subseteq \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$. Тогда A — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа группы $\mathfrak{H} = \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ и $g \in \mathfrak{H} \setminus A$. Положим $\Omega = \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ и покажем, что подгруппа A не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$.

В самом деле, пусть $(X,Y) \in \mathfrak{D}_\Omega(\mathfrak{G})$, $Z = G_v$ (при выполнении условия (λ_Ω)) или $Z = G_{e(\varepsilon)}$ (при выполнении условия (μ_Ω)). Если подгруппа X $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе Z, то $XY \in \mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ и соотношение $A \not\sim_{\mathfrak{G}} XY$ следует из условия теоремы. В противном случае существуют элемент $z \in Z \setminus X$ и число $q \in \mathfrak{P}(\mathscr{C})'$ такие, что $z^q \in X$. Из соотношения $Y \cap Z = 1$ вытекает, что $z \notin XY$ и потому подгруппа XY не является $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированной в группе $\mathfrak{G}$. Следовательно, $A \not\sim_{\mathfrak{G}} XY$.

Если $M, N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, то по теореме Ремака [38, теорема 4.3.9] фактор-группа $\mathfrak{G}/M \cap N$ вкладывается в прямое произведение $\mathscr{C}$-групп $\mathfrak{G}/M$, $\mathfrak{G}/N$ и содержится в классе $\mathscr{C}$ в силу замкнутости последнего относительно взятия подгрупп и расширений. Из указанных свойств и непустоты класса $\mathscr{C}$ следует также, что ему принадлежит единичная группа. Значит, семейство $\Omega = \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ непусто и удовлетворяет условию (α) предложения 7.1. Поскольку условия (β) и (γ) данного предложения при $\Omega = \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ совпадают с условиями (i^1) и (ii^1) теоремы 2.2, к графу Γ, группе $\mathfrak{G}$, семейству $\mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, подграфу Δ и подгруппе A применимо предложение 7.2.

В силу утверждений 1 и 2 данного предложения граф Δ, группа $\mathfrak{H}$, семейство $\Xi = \{N \cap \mathfrak{H} \mid N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})\}$ и подгруппа A удовлетворяют условиям предложения 7.3. Согласно последнему из включения $g \in \mathfrak{H} \setminus A$ следует, что для некоторой подгруппы $M \in \Xi$ справедливо соотношение $g\rho_M \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{H}\rho_M, A\rho_M)$. Отсюда ввиду определения семейства Ξ и утверждения 3 предложения 7.2 вытекает существование подгруппы $N \in \Omega$ такой, что $M = N \cap \mathfrak{H}$ и $g\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$.

Из предложения 4.4 и $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}\rho_N$, имеющей место согласно предложению 6.2, следует, что подгруппа $\mathfrak{I}_N = \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$ является абелевой. Поэтому в силу того же предложения 6.2 найдется подгруппа $L_N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G}\rho_N)$, удовлетворяющая соотношению $g\rho_N \notin \mathfrak{I}_N L_N$. Обозначая через L полный прообраз подгруппы L_N относительно гомоморфизма ρ_N, получаем, что $L \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ и, так как $A\rho_N \leq \mathfrak{I}_N$, то $g \notin AL$. Стало быть, подгруппа L искомая.

II. Пусть $v \in \mathscr{V}$, $X \leq G_v$,

$$\overline{X}_1 = \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} X(N \cap G_v), \quad \overline{X}_2 = \bigcap_{M \in \mathscr{C}^*(G_v)} XM.$$

Тогда $\overline{X}_1 \leq \overline{X}_2$ ввиду утверждения $(*)$. С другой стороны, если $N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, то $G_v/N \cap G_v \cong G_vN/N \leq \mathfrak{G}/N \in \mathscr{C}$ и в силу замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп $N \cap G_v \in \mathscr{C}^*(G_v)$. Поэтому $\overline{X}_1 = \overline{X}_2$. Остается заметить, что равенство $X = \overline{X}_2$ означает $\mathscr{C}$-отделимость подгруппы X в группе G_v и, стало быть, условия (i^1), (ii^1), ($\lambda^1_{\mathscr{C}}$) и ($\mu^1_{\mathscr{C}}$) равносильны соответственно условиям (i^2), (ii^2), ($\lambda^2_{\mathscr{C}}$) и ($\mu^2_{\mathscr{C}}$). Таким образом, доказываемое утверждение обеспечивается первой частью теоремы.

Следствие 2.4 вытекает из теорем 2.2, 2.3 и следующего утверждения.

Предложение 7.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп. Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то ее циклическая подгруппа сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{B}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ ($k = \overline{1,2}$) тогда и только тогда, когда она сопряжена с подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{B}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{A}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$, необходимость утверждения имеет место. Проверим достаточность. Пусть Z — циклическая подгруппа группы $\mathfrak{G}$, сопряженная с подгруппой вида XY, где $(X, Y) \in \mathfrak{D}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$. Предположим, что пара (X, Y) удовлетворяет условию ($\mu^k_{\mathscr{C}}$). Тогда Y — бесконечная циклическая подгруппа, $X \leq G_{e(\varepsilon)}$ для некоторых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$, $XY = X \times Y$ и $X \neq \overline{X}_k$, где

$$\overline{X}_1 = \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} X(N \cap G_{e(\varepsilon)}), \quad \overline{X}_2 = \bigcap_{M \in \mathscr{C}^*(G_{e(\varepsilon)})} XM.$$

Как уже было отмечено при доказательстве утверждения II теоремы 2.3, из замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп следует, что $\overline{X}_2 \leq \overline{X}_1$ и потому $X \neq \overline{X}_1$ при любом k. Вместе с тем, будучи сопряженной с Z, подгруппа $XY = X \times Y$ является циклической. Отсюда

$$1 = X \neq \overline{X}_1 = \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} N \cap G_{e(\varepsilon)} \leq \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} N$$

в противоречие с $\mathscr{C}$-аппроксимируемостью группы $\mathfrak{G}$. Следовательно, пара (X, Y) удовлетворяет условию ($\lambda^k_{\mathscr{C}}$) и потому $XY \in \mathfrak{B}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.

§ 8. Доказательства теорем 3.1, 3.2 и следствий 3.3, 3.4

Теорема 3.1 вытекает из утверждения I теоремы 2.3 и нижеследующего предложения 8.1, объединяющего в себе утверждение 2 теоремы 1 из [17] и частный случай теоремы 2 той же работы (чтобы получить последний, необходимо в указанной теореме положить $w(x, y) = [x, y]$ и $L_{\varepsilon e} = G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$).

Предложение 8.1. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп и группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема. Тогда имеет место условие* ($\mathfrak{i}^1$) *теоремы 2.2. Если для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ содержится в группе $G_{e(\varepsilon)}$ собственным образом и лежит в ее центре, то выполняется и условие* ($\mathfrak{ii}^1$) *указанной теоремы.*

Предложение 8.2 [11, предложение 10, теорема 4]. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) *$\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) и для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ группа G_v $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе H_v;*

2) *$\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (2) и для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$.*

Тогда справедливы следующие утверждения.

I. *Для любых $u \in \mathscr{V}$, $L \in \mathscr{C}^*(G_u)$ существует $\mathscr{C}$-допустимая система совместимых нормальных подгрупп $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ такая, что $R_u \leq L$.*

II. *Если $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все группы G_v ($v \in \mathscr{V}$) $\mathscr{C}$-аппроксимируемы и для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathscr{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Доказательство теоремы 3.2. Объединяя предложение 6.1 и утверждение I предложения 8.2, получаем, что для группы $\mathfrak{G}$ справедливо утверждение (∗) из формулировки теоремы 2.2. Согласно утверждению II предложения 8.2 $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ влечет за собой выполнение условий ($\mathfrak{i}^2$) и ($\mathfrak{ii}^2$) той же теоремы. Поэтому доказываемое утверждение следует из утверждения II теоремы 2.3.

Приводимые далее предложения 8.3 и 8.4 являются частными случаями утверждений из [36]: первое вытекает из предложения 6.3 и теоремы 2.2, второе — из теорем 3.5 и 3.6.

Предложение 8.3. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и X — $\mathscr{C}$-$\mathscr{BN}$-группа. Тогда группа X $\mathscr{C}$-регулярна по любой своей центральной подгруппе и каждая ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа $\mathscr{C}$-отделима.*

Предложение 8.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) или (2) и $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Если каждая группа G_v ($v \in \mathscr{V}$) принадлежит классу $\mathscr{C}$-$\mathscr{BN}$ и не имеет $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Следующее утверждение объединяет в себе частные случаи предложений 14 и 16 из [11].

Предложение 8.5. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Если множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ включает все простые числа, то всякая ограниченная разрешимая группа $\mathscr{C}$-регулярна по любой своей центральной подгруппе и обладает свойством $\mathscr{C}$-отделимости всех подгрупп.*

Предложение 8.6 [11, следствие 3]. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ включает все простые числа. Пусть также $\mathscr{G}(\Gamma)$ — произвольный граф групп типа (1) или конечный* *граф групп типа (2). Если все группы G_v ($v \in \mathscr{V}$) являются ограниченными разрешимыми, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Справедливость следующего утверждения установлена в ходе доказательства предложения 8.7 из [36].

Предложение 8.7. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и $\mathscr{D}$ — подкласс класса периодических разрешимых $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-групп конечного периода, составленный из всех групп, мощность каждой из которых не превосходит мощности некоторой $\mathscr{C}$-группы (не обязательно одной и той же для всех групп из класса $\mathscr{D}$). Тогда $\mathscr{D}$ — корневой класс, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп, $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$, $\mathfrak{P}(\mathscr{D}) = \mathfrak{P}(\mathscr{C})$ и $\mathscr{D}$-$\mathscr{BN} = \mathscr{C}$-$\mathscr{BN}$.*

Доказательство следствия 3.3. Заметим, что согласно предложению 4.1 отсутствие $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения в каждой вершинной группе является необходимым условием $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$. Поэтому в силу предложения 8.4 в формулировке доказываемого следствия слова «группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема» можно заменить на «все группы G_v ($v \in \mathscr{V}$) не имеют $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения и для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$». Будем считать далее, что так и сделано.

Пусть A — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $\mathscr{D}$ — класс групп из предложения 8.7. Тогда при замене класса $\mathscr{C}$ на $\mathscr{D}$ все условия из новой формулировки доказываемого следствия остаются выполненными. При таких условиях группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{D}$-аппроксимируема в силу предложения 8.4. Согласно предложению 8.3 $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{D}}(\mathfrak{G}) = \varnothing$ и всякая группа G_v ($v \in \mathscr{V}$) $\mathscr{D}$-регулярна как по подгруппе H_v, так и по каждой подгруппе $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$, $v = e(\varepsilon)$). Поскольку класс $\mathscr{D}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, из теоремы 3.2 теперь следует, что подгруппа A $\mathscr{D}$-отделима в группе $\mathfrak{G}$. Остается заметить, что в силу предложения 8.7 справедливо включение $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$ и потому подгруппа A оказывается отделимой и классом $\mathscr{C}$.

Доказательство следствия 3.4. Воспользуемся той же схемой рассуждений, что и выше. Поскольку множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ включает все простые числа, каждая подгруппа автоматически оказывается $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированной. Заменяя при необходимости класс $\mathscr{C}$ классом $\mathscr{D}$ из формулировки предложения 8.7, будем считать его далее замкнутым относительно взятия фактор-групп. Это позволяет воспользоваться предложением 8.5, согласно которому $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G}) = \varnothing$ и всякая группа G_v ($v \in \mathscr{V}$) $\mathscr{C}$-регулярна по любой своей центральной подгруппе. В силу предложения 8.6 группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема. Стало быть, требуемое утверждение вытекает из теоремы 3.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов Е. В.* Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. I // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 1083–1093.
2. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
3. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.
4. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 485–497.
5. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами // Мат. заметки. 2013. Т. 93, № 4. С. 483–491.

6. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.

7. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 605–614.

8. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

9. *Азаров Д. Н.* Критерий $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости свободных произведений с объединенной циклической подгруппой нильпотентных групп конечных рангов // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 3. С. 483–494.

10. *Tumanova E. A.* On the residual properties of generalized direct products // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, N 9. P. 1704–1711.

11. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1382–1400.

12. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп некоторых обобщенных свободных произведений и HNN-расширений // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 405–422.

13. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1957. V. 7, N 1. P. 29–62.

14. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. № 5. С. 6–10.

15. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 891–906.

16. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 6. С. 720–740.

17. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.

18. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. V. 43, N 2. P. 856–860.

19. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.

20. *Kim G.* Cyclic subgroup separability of generalized free products // Can. Math. Bull. 1993. V. 36, N 3. P. 296–302.

21. *Kim G.* Cyclic subgroup separability of HNN extensions // Bull. Korean Math. Soc. 1993. V. 30, N 2. P. 285–293.

22. *Sokolov E. V.* On the cyclic subgroup separability of free products of two groups with amalgamated subgroup // Lobachevskii J. Math. 2002. V. 11. P. 27–38.

23. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп в некоторых классах конечных групп. Дис. … канд. физ.-мат. наук. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2003.

24. *Гайворонская М. Ю., Соколов Е. В.* О финитной отделимости циклических подгрупп HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2010. № 2. С. 90–97.

25. *Zhou W., Kim G.* Abelian subgroup separability of certain HNN extensions // Int. J. Algebra Comput. 2018. V. 28, N 3. P. 543–552.

26. *Zhou W., Kim G.* Abelian subgroup separability of certain generalized free products of groups // Algebra Colloq. 2020. V. 27, N 4. P. 651–660.

27. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений с центральными объединенными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 692–702.

28. *Sokolov E. V., Tumanova E. A.* To the question of the root-class residuality of free constructions of groups // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, N 2. P. 260–272.

29. *Sokolov E. V.* On conditions for the root-class residuality of the fundamental groups of graphs of groups. arXiv: 2303.09815 [math.GR], 2023.

30. *Куваев А. Е., Соколов Е. В.* Необходимые условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Изв. вузов. Математика. 2017. № 9. С. 36–47.

31. *Allenby R. B. J. T.* The potency of cyclically pinched one-relator groups // Arch. Math. 1981. V. 36. P. 204–210.

32. *Соколов Е. В.* Строение конечно порожденных ограниченных разрешимых групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2003. № 3. С. 128–132.

33. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.

34. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 219–229.

35. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.

36. *Sokolov E. V.* On the separability of subgroups of nilpotent groups by root classes of groups // J. Group Theory, 2023. DOI: 10.1515/jgth-2022-0021.

37. *Magnus W.* Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring // Math. Ann. 1935. V. 111, N 1. P. 259–280.

38. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 20 марта 2023 г.
После доработки 20 марта 2023 г.
Принята к публикации 2 августа 2023 г.

Соколов Евгений Викторович (ORCID 0000-0002-8256-8016)
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
ev-sokolov@yandex.ru