Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2025, №4, с. 60–70 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Е.В. СОКОЛОВ

НЕКОТОРЫЕ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОГРАНИЧЕННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП И ИХ ДРЕВЕСНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Аннотация. Пусть $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел. Доказано, что любая $\mathfrak{P}$-ограниченная нильпотентная группа является $\mathfrak{P}$-мощной и древесное произведение конечного числа $\mathfrak{P}$-ограниченных нильпотентных групп с собственными локально циклическими реберными подгруппами аппроксимируется конечными $\mathfrak{P}$-группами тогда и только тогда, когда каждая его вершинная группа не имеет $\mathfrak{P}'$-кручения и каждая реберная подгруппа $\mathfrak{P}'$-изолирована в содержащей ее вершинной группе. Также доказано, что древесное произведение конечного числа групп с локально циклическими реберными подгруппами аппроксимируется конечными p-группами, если этим свойством обладают все его вершинные группы и любая реберная подгруппа отделима в соответствующей вершинной группе классом конечных p-групп.

Ключевые слова: мощная группа, нильпотентная группа, финитная аппроксимируемость, аппроксимируемость конечными p-группами, аппроксимируемость разрешимыми группами, обобщенное свободное произведение, древесное произведение, фундаментальная группа графа групп.

УДК: 512.543

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-4-60-70

1. Введение. Формулировка результатов

Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольное множество простых чисел. Напомним, что целое число называется $\mathfrak{P}$-*числом*, если все его простые делители принадлежат множеству $\mathfrak{P}$. Периодическая группа называется $\mathfrak{P}$-*группой*, если порядки всех ее элементов — $\mathfrak{P}$-числа. Через $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ будем обозначать класс конечных $\mathfrak{P}$-групп. При этом, если множество $\mathfrak{P}$ состоит из одного простого числа p, будем писать p- и $\mathcal{F}_p$ вместо $\{p\}$- и $\mathcal{F}_{\{p\}}$ соответственно.

Следуя [1], будем говорить, что элемент x группы X является $\mathfrak{P}$-*мощным*, если для любого положительного $\mathfrak{P}$-числа n, делящего порядок элемента x, существует гомоморфизм группы X на конечную группу, переводящий x в элемент порядка n (здесь предполагается, что ∞ делится на любое ненулевое целое число). Группу X назовем $\mathfrak{P}$-*мощной*, если все ее элементы являются $\mathfrak{P}$-*мощными*. Отметим, что в случае, когда множество $\mathfrak{P}$ включает все простые числа, приведенные определения дают классические понятия *мощного элемента* и *мощной группы*, предложенные Д. Солитэром (см. [2]).

Очевидно, что если $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$, то из $\mathfrak{P}$-мощности (элемента или группы) следует $\mathfrak{Q}$-мощность. Примером группы, $\mathfrak{P}$-мощной для некоторого собственного подмножества множества

Поступила в редакцию 04.03.2024, после доработки 04.03.2024. Принята к публикации 18.12.2024.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта № 2024-04 Ивановского государственного университета.

всех простых чисел, но не являющейся мощной, может служить разрешимая группа Баумслага — Солитэра, т. е. группа с представлением вида $\langle a, b;\ a^{-1}ba = b^k \rangle$, где $k \neq 0$. Такая группа оказывается $\mathfrak{P}$-мощной тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{P}$ не содержит простых делителей числа k ([3], теорема 1).

Хотя свойство мощности изучается уже давно, результатов в этом направлении получено довольно мало. Известно ([4], лемма 1), что данным свойством обладают свободные группы и конечно порожденные нильпотентные группы без кручения. Этот результат вытекает из более общего утверждения о том, что группа является мощной, если она $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p ([5], лемма 2.2) (напомним, что группа X называется *аппроксимируемой классом групп* $\mathcal{C}$, если каждый ее неединичный элемент переходит в неединичный под действием некоторого гомоморфизма группы X на группу из класса $\mathcal{C}$). В [6]–[8] свойство мощности изучалось применительно к конечным и разрешимым группам. Установлено, в частности, что мощными являются полициклическая группа, обладающая конечным субнормальным рядом с бесконечными циклическими факторами ([8], предложение 2), и сверхразрешимая группа, представляющая собой расширение абелевой группы при помощи нильпотентной ([8], теорема E). Вместе с тем указанное свойство, вообще говоря, не имеет места ни для конечных сверхразрешимых групп ([6], пример на с. 116), ни для полициклических групп без кручения ([8], пример 2). Известен также ряд утверждений о замкнутости класса ($\mathfrak{P}$-) мощных групп относительно различных теоретико-групповых конструкций (см. [8]–[10]). Значительно больше результатов получено при изучении свойств слабой и почти ($\mathfrak{P}$-) мощности, однако их описание выходит за рамки данного обзора. За подробностями отошлем читателя к работам [1], [3], [10], [11].

В настоящей статье доказана $\mathfrak{P}$-мощность $\mathfrak{P}$-ограниченных нильпотентных групп; формулировке соответствующей теоремы предпошлем ряд определений и замечаний. Будем говорить, что абелева группа $\mathfrak{P}$-*ограничена*, если в каждой ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части, соответствующие числам из множества $\mathfrak{P}$, конечны. Нильпотентную группу назовем $\mathfrak{P}$-*ограниченной*, если она обладает конечным центральным рядом с $\mathfrak{P}$-ограниченными абелевыми факторами. Легко видеть, что конечно порожденная нильпотентная группа является $\mathfrak{P}$-ограниченной при любом выборе множества $\mathfrak{P}$. Отметим также, что если указанное множество содержит все простые числа, то $\mathfrak{P}$-ограниченные абелевы и нильпотентные группы оказываются соответственно ограниченными абелевыми и нильпотентными ограниченными разрешимыми группами в смысле А. И. Мальцева [12] (см. [13], предложение 5).

Понятия $\mathfrak{P}$-ограниченных абелевой и нильпотентной групп введены в [13], где установлено, что $\mathfrak{P}$-ограниченность нильпотентной группы достаточна (а в случае группы без кручения и необходима) для отделимости классом конечных $\mathfrak{P}$-групп всех $\mathfrak{P}'$-изолированных подгрупп (определения понятий отделимости и изолированности приводятся ниже в этом разделе). Оказывается, что $\mathfrak{P}$-ограниченные нильпотентные группы ведут себя хорошо и при изучении свойства $\mathfrak{P}$-мощности. Имеет место

Теорема 1. *Для любого непустого множества простых чисел $\mathfrak{P}$ произвольная $\mathfrak{P}$-ограниченная нильпотентная группа является $\mathfrak{P}$-мощной.*

Отметим, что данная теорема не накладывает никаких ограничений на периодическую часть группы (и потому последняя не обязана аппроксимироваться каким-либо классом, состоящим из конечных групп). В действительности, она является частным случаем приводимой ниже теоремы 2, формулировка которой также требует некоторых предварительных определений и пояснений.

Если $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп и X — некоторая группа, то через $\mathcal{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$. Будем говорить, что группа X *$\mathcal{C}$-регулярна* по своей подгруппе Y, если для любой подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$, удовлетворяющая соотношению $N \cap Y = M$.

Понятно, что если Y — циклическая подгруппа, порождаемая некоторым элементом y, и $\mathcal{C}$ — класс всех конечных групп, то $\mathcal{C}$-регулярность X по Y равносильна мощности элемента y. Если же $\mathcal{C}$ совпадает с классом $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ конечных $\mathfrak{P}$-групп, где множество $\mathfrak{P}$ содержит не все простые числа, то условие $\mathcal{C}$-регулярности X по Y оказывается сильнее $\mathfrak{P}$-мощности элемента y, поскольку требует от фактор-группы X/N не просто конечности, а принадлежности классу $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$. Ввиду данного замечания следующее утверждение служит обобщением теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел и X — $\mathfrak{P}$-ограниченная нильпотентная группа. Тогда для каждого непустого подмножества $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$ группа X $\mathcal{F}_{\mathfrak{Q}}$-регулярна по любой своей локально циклической подгруппе.*

Приводимая далее теорема 3, в свою очередь, обобщает теорему 2 в случае, когда множество $\mathfrak{P}$ состоит из одного простого числа p. Из нее вытекает также хорошо известное утверждение о том, что любая $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа является p-мощной ([5], следствие 2.3).

Теорема 3. *Пусть p — некоторое простое число и X — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа. Тогда группа X $\mathcal{F}_p$-регулярна по любой своей локально циклической подгруппе.*

Первоначально понятие мощного элемента было введено во многом ради изучения финитной аппроксимируемости (т. е. аппроксимируемости классом всех конечных групп) обобщенного свободного произведения с циклической объединенной подгруппой (см., например, [2]). $\mathcal{C}$-регулярность позволяет распространить эту идею на случай произвольных объединенных подгрупп и аппроксимирующих классов групп. Достаточные условия выполнения различных аппроксимационных свойств свободных конструкций групп, содержащие требования регулярности, а также примеры их использования могут быть найдены, в частности, в [14]–[21]. К числу последних относятся и доказательства приводимых далее теорем 4, 5, формулировки которых вновь нуждаются в ряде предварительных определений и обозначений.

Пусть $\mathcal{T}$ — непустое дерево с множеством вершин $\mathcal{V}$ и множеством ребер $\mathcal{E}$. Каждой вершине $v \in \mathcal{V}$ сопоставляя некоторую группу G_v, а каждому ребру $e \in \mathcal{E}$ — группу H_e и инъективные гомоморфизмы $\varphi_{+e}\colon H_e \to G_{e(1)}$, $\varphi_{-e}\colon H_e \to G_{e(-1)}$ (где $e(1)$ и $e(-1)$ — вершины, являющиеся концами ребра e), получим *граф групп*

$$\mathcal{G} = \big(\mathcal{T},\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e\ (e \in \mathcal{E}),\ \varphi_{\varepsilon e}\ (e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)\big).$$

Древесным произведением, соответствующим этому графу, называется группа $\pi_1(\mathcal{G})$, образующими которой служат образующие групп G_v $(v \in \mathcal{V})$, а определяющими соотношениями — соотношения тех же групп и всевозможные соотношения вида $h_e\varphi_{+e} = h_e\varphi_{-e}$ $(e \in \mathcal{E}$, $h_e \in H_e)$, где $h_e\varphi_{\varepsilon e}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ — слово в образующих группы $G_{e(\varepsilon)}$, задающее образ элемента h_e относительно гомоморфизма $\varphi_{\varepsilon e}$ ([22], § 5.1). Далее для краткости подгруппу $H_e\varphi_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1)$ будем обозначать через $H_{\varepsilon e}$. Граф групп $\mathcal{G}$ назовем *редуцированным*, если $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Предположим, что ребро e и число $\varepsilon = \pm 1$ удовлетворяют условию $H_{\varepsilon e} = G_{e(\varepsilon)}$. Тогда в группе $\pi_1(\mathcal{G})$ для каждого образующего g группы $G_{e(\varepsilon)}$ справедливы соотношения $g = g\varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e} \in G_{e(-\varepsilon)}$, означающие, что указанный образующий может быть исключен из представления группы $\pi_1(\mathcal{G})$. Совокупность всех таких преобразований Тице $\big($в сочетании с удалением соотношений группы $G_{e(\varepsilon)}\big)$ дает тот же эффект, что и стягивание ребра e в вершину $e(-\varepsilon)$ с одновременной корректировкой реберных гомоморфизмов по следующему правилу: если $e(\varepsilon) = f(\delta)$ для некоторых $f \in \mathcal{E} \setminus \{e\}$, $\delta = \pm 1$, то гомоморфизм $\varphi_{\delta f}\colon H_f \to G_{f(\delta)}$ заменяется гомоморфизмом $\varphi'_{\delta f} = \varphi_{\delta f}\varphi_{\varepsilon e}^{-1}\varphi_{-\varepsilon e}$, вкладывающим H_f в $G_{e(-\varepsilon)}$. Понятно, что если дерево $\mathcal{T}$ конечно, то конечное число описанных операций приводит граф групп $\mathcal{G}$ к редуцированному виду и не изменяет группу $\pi_1(\mathcal{G})$. Поэтому далее при рассмотрении древесного произведения конечного числа групп без потери общности можно считать, что оно определяется редуцированным графом групп.

Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольное множество простых чисел. Напомним, что подгруппа Y группы X называется *$\mathfrak{P}'$-изолированной* в этой группе, если для любых элемента $x \in X$ и простого числа $q \notin \mathfrak{P}$ из включения $x^q \in Y$ вытекает соотношение $x \in Y$. Будем говорить, что группа X *не имеет $\mathfrak{P}'$-кручения*, если ее единичная подгруппа $\mathfrak{P}'$-изолирована в X.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел, $\mathcal{T} = (\mathcal{V},\ \mathcal{E})$ — конечное дерево и $\mathcal{G} = \big(\mathcal{T},\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e\ (e \in \mathcal{E}),\ \varphi_{\varepsilon e}\ (e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)\big)$ — редуцированный граф групп. Если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ являются $\mathfrak{P}$-ограниченными нильпотентными, а все группы H_e $(e \in \mathcal{E})$ локально циклические, то следующие утверждения равносильны.*

1. *Древесное произведение $\pi_1(\mathcal{G})$ аппроксимируется классом $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$.*
2. *Древесное произведение $\pi_1(\mathcal{G})$ аппроксимируется классом $\mathcal{FS}_{\mathfrak{P}}$ конечных разрешимых $\mathfrak{P}$-групп.*
3. *Все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ не имеют $\mathfrak{P}'$-кручения и каждая подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathcal{E}, \varepsilon = \pm 1)$ $\mathfrak{P}'$-изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Как уже отмечалось выше, если множество $\mathfrak{P}$ содержит все простые числа, то класс $\mathfrak{P}$-ограниченных нильпотентных групп совпадает с классом нильпотентных групп, являющихся ограниченными разрешимыми в смысле А. И. Мальцева. Поэтому из теоремы 4 вытекает

Следствие. Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{G}$ — конечное дерево и редуцированный граф групп, определенные так же, как и в теореме 4. Если все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ нильпотентны и являются ограниченными разрешимыми в смысле А. И. Мальцева, а все группы H_e $(e \in \mathcal{E})$ локально циклические, то древесное произведение $\pi_1(\mathcal{G})$ финитно аппроксимируемо.

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп. Следуя [12], будем говорить, что подгруппа Y группы X *$\mathcal{C}$-отделима* в этой группе, если для любого элемента $x \in X \backslash Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$, удовлетворяющий условию $x\sigma \notin Y\sigma$. Очевидно, что $\mathcal{C}$-аппроксимируемость группы X равносильна отделимости классом $\mathcal{C}$ ее единичной подгруппы. Как уже упоминалось выше, для подгрупп $\mathfrak{P}$-ограниченных нильпотентных групп свойства $\mathfrak{P}'$-изолированности и $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$-отделимости выполняются одновременно. Поэтому следующее утверждение представляет собой обобщение достаточного условия $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$-аппроксимируемости из теоремы 4 в случае, когда множество $\mathfrak{P}$ содержит лишь один элемент.

Теорема 5. *Пусть p — некоторое простое число, $\mathcal{T} = (\mathcal{V},\ \mathcal{E})$ — конечное дерево, $\mathcal{G} = \big(\mathcal{T},\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e\ (e \in \mathcal{E}),\ \varphi_{\varepsilon e}\ (e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)\big)$ — (не обязательно редуцированный) граф групп и все группы H_e $(e \in \mathcal{E})$ являются локально циклическими. Если каждая группа G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathcal{F}_p$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$, то древесное произведение $\pi_1(\mathcal{G})$ аппроксимируется классом $\mathcal{F}_p$.*

Отметим, что $\mathcal{F}_p$-отделимость подгрупп $H_{\varepsilon e}$, вообще говоря, не является необходимым условием $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G})$ из теоремы 5; об этом свидетельствует, например, теорема 1 из [23]. Вместе с тем конечность дерева $\mathcal{T}$ в условиях теорем 4, 5 и следствия из теоремы 4 существенна, как показывает приводимый

Пример. Пусть $\mathcal{T}$ — граф-звезда с центральной вершиной v_1 и множеством листьев $\{v_i \mid i = 2, 3, \ldots\}$. Пусть также p — некоторое простое число и Z_i $(i \geqslant 0)$ — циклическая группа порядка p^{i+1} с порождающим z_i. Сопоставим вершине v_i $(i \geqslant 1)$ группу Z_i, а ребру, соединяющему вершины v_1 и v_i $(i \geqslant 2)$ — группу Z_0 и гомоморфизмы, переводящие порождающий z_0 в z_1^p и $z_i^{p^i}$. Тогда, за исключением конечности дерева $\mathcal{T}$, выполняются все условия теоремы 5, а также (при выборе множества $\mathfrak{P}$ содержащим число p) условия теоремы 4 и утверждение 3 последней. Вместе с тем при любом гомоморфизме σ древесного произведения $\pi_1(\mathcal{G})$ на конечную группу найдется такое $i \geqslant 1$, что порядок элемента $z_i\sigma$ меньше p^{i+1} и, следовательно, $(z_i\sigma)^{p^i} = 1$. Стало быть, $z_0\sigma = 1$ и группа $\pi_1(\mathcal{G})$ не является финитно аппроксимируемой.

В заключение данного раздела отметим, что теоремы 4 и 5 обобщают следствие 5.5 из [24] и теорему 3 из [25], в которых идет речь об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости древесного произведения с циклическими реберными подгруппами, соответственно, конечно порожденных нильпотентных и произвольных $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп.

2. Доказательство теорем 2 и 3

Доказательство теоремы 3. Пусть Y — локально циклическая подгруппа группы X. Заметим прежде всего, что если $N \in \mathcal{F}_p^*(Y)$ и $k = [Y : N]$, то $N = Y^k$. В самом деле, очевидно, $Y^k \leqslant N$. В то же время, поскольку период локально циклической группы Y/Y^k делит k, указанная группа является циклической и имеет порядок не выше k. Следовательно, $Y^k = N$.

Пусть теперь M — произвольная подгруппа из семейства $\mathcal{F}_p^*(Y)$, yM — некоторый порождающий конечной циклической группы Y/M, q — порядок последней и $S = \{y, y^2, \ldots, y^{q-1}\}$. Тогда $1 \notin S$ и, пользуясь $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью группы X, можно найти подгруппу $Z \in \mathcal{F}_p^*(X)$, удовлетворяющую соотношению $S \cap Z = \varnothing$. Так как любые два неравных элемента множества S лежат в разных смежных классах по модулю подгруппы Z, то $q \leqslant r$, где $r = |YZ/Z| = [Y : Z \cap Y]$. Поскольку q и r являются p-числами, $M = Y^q$ и $Z \cap Y = Y^r$, отсюда следует, что q делит r, $Z \cap Y \leqslant M$, $(YZ/Z)/(MZ/Z) \cong Y/M(Y \cap Z) = Y/M$ и $[YZ/Z : MZ/Z] = q$.

Хорошо известно, что каждая $\mathcal{F}_p$-группа обладает нормальным рядом с факторами порядка p. Пусть

$$1 = Z_0/Z \leqslant Z_1/Z \leqslant \ldots \leqslant Z_n/Z = X/Z$$

— такой ряд группы X/Z. Тогда факторы ряда

$$1 = YZ/Z \cap Z_0/Z \leqslant YZ/Z \cap Z_1/Z \leqslant \ldots \leqslant YZ/Z \cap Z_n/Z = YZ/Z$$

имеют порядки 1 или p и поэтому

$$\big\{[YZ/Z : YZ/Z \cap Z_i/Z] \mid 0 \leqslant i \leqslant n\big\} = \big\{1, p, p^2, \ldots, r\big\}.$$

Так как конечная циклическая группа YZ/Z содержит лишь одну подгруппу индекса q, то $Z_i/Z \cap YZ/Z = MZ/Z$ для некоторого $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Из последнего равенства и включения $Z \cap Y \leqslant M$ легко следует $Z_i \cap Y = M$. Поскольку $Z_i/Z \in \mathcal{F}_p^*(X/Z)$, справедливо соотношение $Z_i \in \mathcal{F}_p^*(X)$. Ввиду произвольности выбора подгруппы M отсюда вытекает, что группа X $\mathcal{F}_p$-регулярна по подгруппе Y. $\square$

Предложение 1 ([13], предложение 2)**.** *Для любого непустого множества простых чисел $\mathfrak{P}$ класс $\mathfrak{P}$-ограниченных нильпотентных групп замкнут относительно взятия фактор-групп.*

Предложение 2 ([13], теорема 3)**.** *Пусть $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел, X — $\mathfrak{P}$-ограниченная нильпотентная группа, Y — подгруппа группы X. Тогда $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$-отделимость подгруппы Y в группе X равносильна ее $\mathfrak{P}'$-изолированности в этой группе. В частности, группа X $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не имеет $\mathfrak{P}'$-кручения.*

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел, X — $\mathfrak{P}$-ограниченная нильпотентная группа и $p \in \mathfrak{P}$. Тогда группа X $\mathcal{F}_p$-регулярна по любой своей локально циклической подгруппе.*

Доказательство. Пусть Y — локально циклическая подгруппа группы X и $M \in \mathcal{F}_p^*(Y)$. Для завершения доказательства достаточно указать подгруппу $N \in \mathcal{F}_p^*(X)$, удовлетворяющую соотношению $N \cap Y = M$.

Пусть T — множество всех элементов группы X, порядки которых конечны и являются p'-числами. Известно (см., например, [26], следствие из теоремы 4.5), что это множество представляет собой нормальную подгруппу группы X. Из соотношения $Y/M \in \mathcal{F}_p$ легко следует $T \cap Y \leqslant M$. В силу предложения 1 фактор-группа X/T является $\mathfrak{P}$-ограниченной нильпотентной. Поскольку $p \in \mathfrak{P}$, указанная группа оказывается и p-ограниченной. Очевидно также, что она не имеет p'-кручения. Значит, группа X/T $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема в силу предложения 2 и $\mathcal{F}_p$-регулярна по локально циклической подгруппе YT/T согласно теореме 3. Из регулярности и легко проверяемого включения $MT/T \in \mathcal{F}_p^*(YT/T)$ вытекает существование подгруппы $N/T \in \mathcal{F}_p^*(X/T)$, удовлетворяющей соотношению $N/T \cap YT/T = MT/T$. Тогда $N \in \mathcal{F}_p^*(X)$ и, так как $T \cap Y \leqslant M$, то $N \cap Y = M$. Следовательно, подгруппа N является искомой. □

Всюду далее, если $\mathfrak{P}$ — некоторое множество простых чисел, то через $\mathcal{FN}_{\mathfrak{P}}$ будем обозначать класс конечных нильпотентных $\mathfrak{P}$-групп.

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел, X — некоторая группа и Y — подгруппа группы X. Если группа X $\mathcal{F}_p$-регулярна по подгруппе Y для каждого простого числа $p \in \mathfrak{P}$, то она $\mathcal{FN}_{\mathfrak{P}}$-регулярна по этой подгруппе.*

Доказательство. Как и выше, зафиксируем подгруппу $M \in \mathcal{FN}_{\mathfrak{P}}^*(Y)$ и укажем подгруппу $N \in \mathcal{FN}_{\mathfrak{P}}^*(X)$, удовлетворяющую соотношению $N \cap Y = M$.

По теореме Бернсайда–Виландтa (см., например [26], теорема 2.7) фактор-группа Y/M раскладывается в прямое произведение своих силовских подгрупп $L_1/M, \ldots, L_n/M$. Пусть p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — простое число, которому соответствует подгруппа L_i/M, и $M_i/M = \prod_{j \neq i} L_j/M$. Тогда $[Y/M : M_i/M]$ — p_i-число $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $\bigcap_{i=1}^n M_i/M = 1$, отсюда $M = \bigcap_{i=1}^n M_i$. Так как $Y/M \in \mathcal{FN}_{\mathfrak{P}}$, то $p_1, \ldots, p_n \in \mathfrak{P}$. Поэтому для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ ввиду равенства $[Y : M_i] = [Y/M : M_i/M]$ и $\mathcal{F}_{p_i}$-регулярности группы X по подгруппе Y найдется подгруппа $N_i \in \mathcal{F}_{p_i}^*(X)$, удовлетворяющая соотношению $N_i \cap Y = M_i$. Положим $N = \bigcap_{i=1}^n N_i$. По теореме Ремака (см., например, [27], теорема 4.3.9) фактор-группа X/N вкладывается в прямое произведение фактор-групп X/N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, каждая из которых принадлежит классу $\mathcal{FN}_{\mathfrak{P}}$ в силу соотношений $p_i \in \mathfrak{P}$, $\mathcal{F}_{p_i} \subseteq \mathcal{FN}_{\mathfrak{P}}$. Следовательно, $X/N \in \mathcal{FN}_{\mathfrak{P}}$ и, поскольку $N \cap Y = \bigcap_{i=1}^n N_i \cap Y = \bigcap_{i=1}^n M_i = M$, подгруппа N оказывается искомой. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathfrak{Q}$ — непустое подмножество множества $\mathfrak{P}$ и Y — локально циклическая подгруппа группы X. Тогда X — $\mathfrak{Q}$-ограниченная нильпотентная группа. Согласно предложениям 3 и 4 она $\mathcal{F}_p$-регулярна по подгруппе Y для каждого простого числа $p \in \mathfrak{Q}$ и $\mathcal{FN}_{\mathfrak{Q}}$-регулярна по этой подгруппе. Поскольку группа X нильпотентна, свойства $\mathcal{FN}_{\mathfrak{Q}}$-регулярности и $\mathcal{F}_{\mathfrak{Q}}$-регулярности для нее совпадают. Значит, указанная группа $\mathcal{F}_{\mathfrak{Q}}$-регулярна по подгруппе Y, что и требовалось. $\square$

3. Доказательство теорем 4 и 5

Всюду в этом разделе будем предполагать заданными дерево $\mathcal{T} = (\mathcal{V},\ \mathcal{E})$ и граф групп $\mathcal{G} = \big(\mathcal{T},\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e\ (e \in \mathcal{E}),\ \varphi_{\varepsilon e}\ (e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)\big)$. Напомним (см. [28]), что согласно одному из равносильных определений содержащий неединичные группы класс групп $\mathcal{C}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathcal{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$.

Предложение 5 ([29], теорема 1)**.** *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп.*

1. *Группа $\pi_1(\mathcal{G})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, если выполняются следующие условия,*
   (i) $\forall v \in \mathcal{V}\ \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}))} (N \cap G_v) = 1$,
   (ii) $\forall e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1\ \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}))} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) = H_{\varepsilon e}$.
2. *Если группа $\pi_1(\mathcal{G})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то выполняется условие* (i).

Будем говорить, что слово в алфавите $\{x,\ y,\ x^{-1},\ y^{-1}\}$ имеет *специальный вид*, если оно не содержит подслов вида $x^{\alpha}x^{\beta}$ и $y^{\alpha}y^{\beta}$, где $\alpha, \beta = \pm 1$. Следующее утверждение является частным случаем теоремы 2 из [29].

Предложение 6. *Пусть граф $\mathcal{G}$ редуцирован и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ существует слово $\omega(x, y)$ специального вида такое, что $\omega(h, g) = 1$ для всех $h \in H_{\varepsilon e}$, $g \in G_{e(\varepsilon)}$. Тогда из аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G})$ некоторым классом групп $\mathcal{C}$ следует выполнение условия* (ii) *предложения* 5.

Приведем ряд понятий и обозначений из [29]. Пусть для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ в группе G_v выбрана некоторая нормальная подгруппа R_v. Семейство $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ будем называть *системой совместимых нормальных подгрупп* группы $\pi_1(\mathcal{G})$, если для любого ребра $e \in \mathcal{E}$ справедливо равенство $\Big(R_{e(1)} \cap H_{+e}\Big)\varphi_{+e}^{-1} = \Big(R_{e(-1)} \cap H_{-e}\Big)\varphi_{-e}^{-1}$.

Пусть

$$\overline{G}_v = G_v/R_v\ (v \in \mathcal{V}), \quad R_e = \Big(R_{e(\pm 1)} \cap H_{\pm e}\Big)\,\varphi_{\pm e}^{-1}\ (e \in \mathcal{E}),$$

$$\overline{H}_e = H_e/R_e\ (e \in \mathcal{E}), \quad \overline{H}_{\varepsilon e} = H_{\varepsilon e}R_{e(\varepsilon)}/R_{e(\varepsilon)}\ (e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1).$$

Легко видеть, что отображение $\overline{\varphi}_{\varepsilon e}\colon \overline{H}_e \to \overline{G}_{e(\varepsilon)}$ ($e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$), переводящее смежный класс hR_e ($h \in H_e$) в элемент $(h\varphi_{\varepsilon e})R_{e(\varepsilon)}$, корректно определено и является изоморфизмом группы $\overline{H}_e$ на подгруппу $\overline{H}_{\varepsilon e}$. Поэтому можно рассмотреть граф групп

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \big(\mathcal{T},\ \overline{G}_v\ (v \in \mathcal{V}),\ \overline{H}_e\ (e \in \mathcal{E}),\ \overline{\varphi}_{\varepsilon e}\ (e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)\big)$$

и сюръективный гомоморфизм $\rho_{\mathcal{R}}\colon \pi_1(\mathcal{G}) \to \pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$, действующий тождественно на образующих группы $\pi_1(\mathcal{G})$. Нетрудно показать, что $\ker \rho_{\mathcal{R}} \cap G_v = R_v$ для всех $v \in \mathcal{V}$.

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп. Назовем систему $\mathcal{R}$ *$\mathcal{C}$-допустимой*, если существует гомоморфизм древесного произведения $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$ на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на всех группах $\overline{G}_v$ ($v \in \mathcal{V}$). Далее через $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$ будем обозначать совокупность всех $\mathcal{C}$-допустимых систем совместимых нормальных подгрупп группы $\pi_1(\mathcal{G})$.

Предложение 7 ([29], теорема 3). *Если $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, и для любых $u \in \mathcal{V}$, $M \in \mathcal{C}^*(G_u)$ существует система $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\} \in \mathfrak{R}(\mathcal{C})$ такая, что $R_u \leqslant M$, то условия* (i) *и* (ii) *из формулировки предложения* 5 *равносильны следующим условиям*:

(i)$'$ *все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы,*

(ii)$'$ *для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Предложение 8. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп и для любой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа $\pi_1(\mathcal{G})$ $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе G_v. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если выполняются условия* (i)$'$ *и* (ii)$'$ *из формулировки предложения* 7, *то группа $\pi_1(\mathcal{G})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

2. *Если граф $\mathcal{G}$ редуцирован и все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ нильпотентны, то верно и обратное*: *из $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G})$ вытекают условия* (i)$'$ *и* (ii)$'$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные вершину $u \in \mathcal{V}$ и подгруппу $M \in \mathcal{C}^*(G_u)$. Поскольку группа $\pi_1(\mathcal{G})$ $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе G_u, существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}))$, удовлетворяющая соотношению $N \cap G_u = M$. В силу предложения 2 из [29] система подгрупп $\mathcal{R} = \{N \cap G_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ принадлежит совокупности $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$. Значит, выполнены все условия предложения 7, согласно которому требования (i) и (ii) из формулировки предложения 5 равносильны требованиям (i)$'$ и (ii)$'$. Отсюда и из предложения 5 вытекает справедливость утверждения 1.

Предположим теперь, что граф $\mathcal{G}$ редуцирован и все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ являются нильпотентными. Определим последовательность слов $\omega_k(x, y)$ в алфавите $\{x,\, y,\, x^{-1},\, y^{-1}\}$ следующим образом:

$$\omega_1(x, y) = [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy, \quad \omega_{k+1}(x, y) = [x,\, \omega_k(x, y)], \quad k \geqslant 1.$$

Используя индукцию по k, нетрудно проверить, что для каждого $k \geqslant 1$ слово $\omega_k(x, y)$ имеет длину 2^{k+1}, начинается на $x^{-1}y^{-1}$, заканчивается на xy и не содержит подслов вида $x^\alpha x^\beta$ и $y^\alpha y^\beta$, где $\alpha, \beta = \pm 1$. Если $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ и c — ступень нильпотентности группы $G_{e(\varepsilon)}$, то для любых $h \in H_{\varepsilon e}$, $g \in G_{e(\varepsilon)}$ справедливо равенство $\omega_c(h, g) = 1$. Значит, к графу $\mathcal{G}$ применимо предложение 6, согласно которому условие (ii) является необходимым для $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G})$. Необходимость условия (i) обеспечивается предложением 5. Ввиду доказанной выше равносильности требований (i), (ii) и (i)$'$, (ii)$'$ отсюда следует, что утверждение 2 доказываемого предложения также имеет место. □

Предложение 9. *Если p — некоторое простое число, дерево $\mathcal{T}$ конечно, все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемы и все группы H_e $(e \in \mathcal{E})$ являются конечными циклическими, то группа $\pi_1(\mathcal{G})$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Очевидные индуктивные соображения позволяют ограничиться рассмотрением случая, когда дерево $\mathcal{T}$ содержит лишь одно ребро. При таком предположении доказываемое утверждение оказывается частным случаем теоремы 4.3 из [5]. □

Предложение 10. *Пусть дерево $\mathcal{T}$ конечно и все группы H_e $(e \in \mathcal{E})$ являются локально циклическими. Если p — некоторое простое число и для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathcal{F}_p$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$, то для каждой вершины $u \in \mathcal{V}$ группа $\pi_1(\mathcal{G})$ $\mathcal{F}_p$-регулярна по подгруппе G_u.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{V}$ и $M \in \mathcal{F}_p^*(G_u)$. Покажем, что существует подгруппа $N \in \mathcal{F}_p^*(\pi_1(\mathcal{G}))$, удовлетворяющая соотношению $N \cap G_u = M$.

Воспользуясь индукцией по длине (единственного) пути, соединяющего в дереве $\mathcal{T}$ заданную вершину с вершиной u, построим в группе $\pi_1(\mathcal{G})$ такую систему $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ совместимых нормальных подгрупп, что $R_v \in \mathcal{F}_p^*(G_v)$ для всех $v \in \mathcal{V}$. Положим $R_u = M$. Далее будем считать, что для всех вершин, находящихся от u на расстоянии менее $\ell \geqslant 1$, соответствующие им подгруппы системы $\mathcal{R}$ уже построены, и выберем произвольную вершину w на расстоянии ℓ от u. Очевидно, что существует в точности одно ребро e, связывающее w с некоторой из уже рассмотренных вершин, и что второй конец ребра e находится от u на расстоянии $\ell - 1$. Пусть число $\varepsilon = \pm 1$ таково, что $e(\varepsilon) = w$. Согласно индуктивному предположению подгруппа $R_{e(-\varepsilon)} \in \mathcal{F}_p^*(G_{e(-\varepsilon)})$ уже определена. Так как

$$H_{-\varepsilon e}/R_{e(-\varepsilon)} \cap H_{-\varepsilon e} \cong H_{-\varepsilon e}R_{e(-\varepsilon)}/R_{e(-\varepsilon)} \leqslant G_{e(-\varepsilon)}/R_{e(-\varepsilon)}$$

и $G_{e(-\varepsilon)}/R_{e(-\varepsilon)} \in \mathcal{F}_p$, то $R_{e(-\varepsilon)} \cap H_{-\varepsilon e} \in \mathcal{F}_p^*(H_{-\varepsilon e})$ и $\Big(R_{e(-\varepsilon)} \cap H_{-\varepsilon e}\Big)\varphi_{-\varepsilon e}^{-1}\varphi_{\varepsilon e} \in \mathcal{F}_p^*(H_{\varepsilon e})$. Ввиду $\mathcal{F}_p$-регулярности группы $G_{e(\varepsilon)}$ по подгруппе $H_{\varepsilon e}$ отсюда вытекает, что существует подгруппа $R_w \in \mathcal{F}_p^*(G_w)$, удовлетворяющая соотношению $R_w \cap H_{\varepsilon e} = \Big(R_{e(-\varepsilon)} \cap H_{-\varepsilon e}\Big)\varphi_{-\varepsilon e}^{-1}\varphi_{\varepsilon e}$. Тогда $\Big(R_w \cap H_{\varepsilon e}\Big)\varphi_{\varepsilon e}^{-1} = \Big(R_{e(-\varepsilon)} \cap H_{-\varepsilon e}\Big)\varphi_{-\varepsilon e}^{-1}$ и, стало быть, определяемая описанным образом система $\mathcal{R}$ является искомой.

Очевидно, что дерево $\mathcal{T}$ и граф групп $\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \big(\mathcal{T},\ \overline{G}_v\ (v \in \mathcal{V}),\ \overline{H}_e\ (e \in \mathcal{E}),\ \overline{\varphi}_{\varepsilon e}\ (e \in \mathcal{E}, \varepsilon = \pm 1)\big)$ удовлетворяют всем условиям предложения 9, согласно которому группа $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Отсюда имеем существование подгруппы $\overline{N} \in \mathcal{F}_p^*(\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}))$, тривиально пересекающейся с конечной подгруппой $\overline{G}_u = G_u/R_u$. Обозначим через N полный прообраз подгруппы $\overline{N}$ относительно гомоморфизма $\rho_{\mathcal{R}}$. Тогда $N \in \mathcal{F}_p^*(\pi_1(\mathcal{G}))$ и, поскольку $\ker \rho_{\mathcal{R}} \cap G_u = R_u = M$, справедливо равенство $N \cap G_u = M$. Значит, подгруппа N является искомой. $\square$

Доказательство теоремы 4. В силу предложения 3 для любых $p \in \mathfrak{P}$, $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathcal{F}_p$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$. Поэтому согласно предложений 10 и 4 для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа $\pi_1(\mathcal{G})$ $\mathcal{FN}_{\mathfrak{P}}$-регулярна по подгруппе G_v. Ввиду нильпотентности последней справедливы равенства $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}^*(G_v) = \mathcal{FN}_{\mathfrak{P}}^*(G_v) = \mathcal{FS}_{\mathfrak{P}}^*(G_v)$. Значит, группа $\pi_1(\mathcal{G})$ $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$- и $\mathcal{FS}_{\mathfrak{P}}$-регулярна по подгруппе G_v. Нетрудно проверить, что классы $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ и $\mathcal{FS}_{\mathfrak{P}}$ являются корневыми. Поэтому согласно предложению 8 группа $\pi_1(\mathcal{G})$ аппроксимируется классом $\mathcal{C}$, где $\mathcal{C} = \mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$ или $\mathcal{C} = \mathcal{FS}_{\mathfrak{P}}$, тогда и только тогда, когда

(i)$'$ все группы G_v $(v \in \mathcal{V})$ $\mathcal{C}$-аппроксимируемы,

(ii)$'$ для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathcal{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.

В силу предложения 2 $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$-отделимость подгруппы $H_{\varepsilon e}$ в группе $G_{e(\varepsilon)}$ равносильна ее $\mathfrak{P}'$-изолированности в этой группе, а $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$-аппроксимируемость группы G_v — отсутствию в ней $\mathfrak{P}'$-кручения. Поскольку для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ группа $G_{e(\varepsilon)}$ нильпотентна, $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$-аппроксимируемость данной группы и $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$-отделимость в ней подгруппы $H_{\varepsilon e}$ имеют место одновременно с аппроксимируемостью и отделимостью классом $\mathcal{FN}_{\mathfrak{P}}$, а значит, и классом $\mathcal{FS}_{\mathfrak{P}}$. Таким образом, каждое из утверждений 1, 2 теоремы 4 равносильно утверждению 3. $\square$

Доказательство теоремы 5. В силу теоремы 3 для любых $e \in \mathcal{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathcal{F}_p$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$. Согласно предложению 10 отсюда следует, что для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ группа $\pi_1(\mathcal{G})$ $\mathcal{F}_p$-регулярна по подгруппе G_v. Легко видеть, что класс $\mathcal{F}_p$ является корневым. Стало быть, доказываемая теорема вытекает из утверждения 1 предложения 8. $\square$

Литература

[1] Азаров Д.Н. *О слабой π-мощности некоторых групп и свободных произведений*, Сиб. матем. журн. **61** (6), 1199–1211 (2020), DOI : 10.33048/smzh.2020.61.601.

[2] Allenby R.B.J.T, Tang C.Y. *The residual finiteness of some one-relator groups with torsion*, J. Algebra **71** (1), 132–140 (1981), DOI : 10.1016/0021-8693(81)90110-1.

[3] Азаров Д.Н. *О почти мощности некоторых групп и свободных конструкций*, Сиб. матем. журн. **63** (6), 1189–1203 (2022), DOI : 10.33048/smzh.2022.63.601.

[4] Stebe P.F. *Conjugacy separability of certain free products with amalgamation*, Trans. Amer. Math. Soc. **156**, 119–129 (1971), DOI : 10.1090/S0002-9947-1971-0274597-5.

[5] Kim G., McCarron J. *On Amalgamated Free Products of Residually p-Finite Groups*, J. Algebra **162** (1), 1–11 (1993), DOI : 10.1006/jabr.1993.1237.

[6] Poland J. *Finite potent groups*, Bull. Austral. Math. Soc. **23** (1), 111–120 (1981), DOI : 10.1017/S0004972700006936.

[7] Wehrfritz B.A.F. *The residual finiteness of some generalised free products*, J. Lond. Math. Soc. **s2-24** (1), 123–126 (1981), DOI : 10.1112/jlms/s2-24.1.123.

[8] Hartley B., Lennox J.C., Rhemtulla A.H. *Cyclically separated groups*, Bull. Austral. Math. Soc. **26** (3), 355–384 (1982), DOI : 10.1017/S0004972700005840.

[9] Allenby R.B.J.T *The potency of cyclically pinched one-relator groups*, Arch. Math. **36**, 204–210 (1981), DOI : 10.1007/BF01223691.

[10] Азаров Д.Н. *О почти мощности групп автоморфизмов и расщепляемых расширений*, Сиб. матем. журн. **64** (6), 1119–1130 (2023), DOI : 10.33048/smzh.2023.64.601.

[11] Wehrfritz B.A.F. *Potency in soluble groups*, Monatsh. Math. **204**, 389–393 (2024).

[12] Мальцев А.И. *О гомоморфизмах на конечные группы*, Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та **18** (5), 49–60 (1958).

[13] Соколов Е.В. *Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп*, Сиб. матем. журн. **55** (6), 1381–1390 (2014).

[14] Wong P.C., Tang C.K. *Tree products of cyclic subgroup separable groups*, Bull. Malaysian Math. Soc. Ser. 2 **18** (2), 49–54 (1995), URL : https://www.researchgate.net/publication/266362349.

[15] Wong P.C., Tang C.K. *Tree products and polygonal products of weakly potent groups*, Algebra Colloq. **5** (1), 1–12 (1998), URL : https://www.researchgate.net/publication/266365179.

[16] Kim G., Tang C.Y. *Separability Properties of Certain Tree Products of Groups*, J. Algebra **251** (1), 323–349 (2002), DOI : 10.1006/jabr.2001.9134.

[17] Туманова Е.А. *Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением*, Изв. вузов. Матем. (10), 27–44 (2015).

[18] Kim G., Tang C.Y. *Abelian subgroup separability of certain generalized free products of groups*, Algebra Colloq. **27** (4), 651–660 (2020), DOI : 10.1142/S1005386720000541.

[19] Соколов Е.В. *Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами*, Сиб. матем. журн. **62** (6), 1382–1400 (2021), DOI : 10.33048/smzh.2021.62.613.

[20] Sokolov E.V. *Certain residual properties of HNN-extensions with central associated subgroups*, Comm. Algebra **50** (3), 962–987 (2022), DOI : 10.1080/00927872.2021.1976791.

[21] Соколов Е.В. *Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп.* II, Сиб. матем. журн. **65** (1), 207–228 (2024), DOI : 10.33048/smzh.2024.65.116.

[22] Serr J.-P. *Trees* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980), DOI : 10.1007/978-3-642-61856-7.

[23] Baumslag G. *On the residual nilpotence of certain one-relator groups*, Comm. Pure Appl. Math. **21** (5), 491–506 (1968), DOI : 10.1002/cpa.3160210504.

[24] Kim G., Tang C.Y. *On Generalized Free Products of Residually Finite p-Groups*, J. Algebra **201** (1), 317–327 (1998), DOI : 10.1006/jabr.1997.7256.

[25] Wong P.C., Tang C.K. *Tree products of residually p-finite groups*, Algebra Colloq. **2** (3), 209–212 (1995), URL : https://www.researchgate.net/publication/265327116.

[26] Холл Ф. *Нильпотентные группы*, Математика. **12** (1), 3–36 (1968).

[27] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. *Основы теории групп*, 3-е изд. (Наука, М., 1982).

[28] Sokolov E.V. *A Characterization of Root Classes of Groups*, Comm. Algebra **43** (2), 856–860 (2015), DOI : 10.1080/00927872.2013.851207.

[29] Соколов Е.В. *Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп*, Сиб. матем. журн. **62** (4), 878–893 (2021), DOI: 10.33048/smzh.2021.62.414.

Евгений Викторович Соколов

Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, д. 39, г. Иваново, 153025, Россия,

e-mail: ev-sokolov@yandex.ru

E.V. Sokolov

Certain residual properties of bounded nilpotent groups and their tree products

Abstract. Let $\mathfrak{P}$ be a non-empty set of primes. We prove that any $\mathfrak{P}$-bounded nilpotent group is $\mathfrak{P}$-potent, and the tree product T of a finite number of $\mathfrak{P}$-bounded nilpotent groups with proper locally cyclic edge subgroups is residually a finite $\mathfrak{P}$-group if and only if any vertex group of T has no $\mathfrak{P}'$-torsion and any edge subgroup of T is $\mathfrak{P}'$-isolated in the vertex group containing it. We prove also that the tree product of a finite number of groups with locally cyclic edge subgroups is residually a finite p-group if all its vertex groups have this property and any edge subgroup is separable in the corresponding vertex group by the class of finite p-groups.

Keywords: potent group, nilpotent group, residual finiteness, residual p-finiteness, residual solvability, generalized free product, tree product, fundamental group of a graph of groups.

Evgeny Victorovich Sokolov

Ivanovo State University,
39 Ermak str., Ivanovo, 153025 Russia,

e-mail: ev-sokolov@yandex.ru